Elftes Übungsblatt zur Theorie D (QM I)

Abgabe: 05.07.2005 10:45 Uhr

NAME:

GRUPPE:

Aufgabe 1

(2 Punkte)

Der Radialanteil $R_{nl}(r)$ der Wellenfunktion $\langle r | n, l, m \rangle = R_{nl}(r) Y_{lm}(\Omega)$ für das Wasserstoffatom ist durch

$$R_{nl}(r) = \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}} a_0^{-3/2} F_{nl} \left(\frac{2r}{na_0} \right),$$
$$F_{nl}(\rho) = \rho^l e^{-\rho/2} L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$$

gegeben. Dabei lauten für $p, k \in N_0$ die Laguerre-Polynome

$$L_p^k(\rho) = \frac{(p+k)!}{p!} \frac{e^\rho}{\rho^k} \frac{d^p}{d\rho^p} [\rho^{p+k} e^{-\rho}]$$

und erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{p!}{[(p+k)!]^3} \int_0^\infty d\rho \rho^k e^{-\rho} L_p^k(\rho) L_{p'}^k(\rho) = \delta_{p,p'}.$$

- (i) Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators $1/R$ für die gebundenen Energieeigenzustände.
- (ii) Verifizieren Sie den Virialsatz

$$2\langle E_{kin} \rangle = -\langle V \rangle$$

unter Verwendung Ihres Ergebnisses aus (i).

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Wir wollen das Korrespondenzprinzip am Beispiel des Wasserstoffatoms veranschaulichen. Dazu betrachten wir die Summe aus Zentrifugal- und Coulombpotential für $l = n - 1$ mit $l \neq 0$:

$$V(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}.$$

- (i) Für welchen Wert r_m nimmt $V(r)$ sein Minimum an? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Erwartungswert des Operators R und ebenso $1/r_m$ mit dem Erwartungswert des Operators $1/R$. Bilden Sie den Limes großer n .
 - (ii) Vergleichen Sie $V(r_m)$ mit dem exakten Wert $\langle V \rangle$ für die Bindungsenergie.
-

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Mit Hilfe der dimensionlosen Variablen $\rho = kr$, $\hbar^2 k^2 = 2mE$, lautet die radiale Schrödingergleichung für ein freies Teilchen

$$T_l R_l(\rho) = \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 \right) R_l(\rho) = 0.$$

Ihre Lösungen lauten

$$j_l = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \left(\frac{\sin \rho}{\rho} \right), \quad n_l = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \left(\frac{\cos \rho}{\rho} \right).$$

- (i) Prüfen Sie nach, dass diese Funktionen tatsächlich die Gleichung lösen.
Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion. Versuchen Sie in $T_l j_l$ (oder $T_l n_l$) den Faktor $\rho^{-1} d/d\rho$ nach links durchzukommutieren und auf den Ausdruck $[(l-1)\rho^{-1} - d/d\rho] T_{l-1} j_{l-1}(\rho)$ (bzw. $[(l-1)\rho^{-1} - d/d\rho] T_{l-1} n_{l-1}(\rho)$) zu kommen.
- (ii) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen j_l und n_l für sehr kleine und sehr große Werte von ρ .