Zwölftes Übungsblatt zur Theorie D (QM I)

Abgabe: 12.07.2005 10:45 Uhr

NAME:

GRUPPE:

Aufgabe 1

(2 Punkte)

Ein Teilchen befinde sich in einem kugelförmigen Potentialtopf vom Radius a mit der Potentialverteilung

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \infty & r \geq a. \end{cases}$$

Die Radialanteile der Eigenzustände sind die (bei $r = 0$ regulären) sphärischen Besselfunktionen $j_l(k_{nl}r)$, wobei die k_{nl} auf einfache Weise mit den Energiewerten E_{nl} zusammenhängen.

Aus welcher Gleichung entnimmt man die k_{nl} , bzw. die E_{nl} ? Welchen Wert haben die E_{nl} für $l = 0$? Welches ist der niedrigste Eigenwert für $l = 1$ bzw. $l=2$?

Aufgabe 2

(2 Punkte)

- (i) Berechnen Sie die Streuphase δ_1 für P -Wellen Streuung an einer harten Kugel. Benutzen Sie dazu die folgenden Hinweise:

Eine harte Kugel wird durch $V(r) = \infty$ für $r < R$ und $V(r) = 0$ für $r > R$ beschrieben. Der Lösungsansatz im Bereich $r > R$ lautet:

$$u_{k,l=1}(r) = C \left[\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) + a \left(\frac{\cos(kr)}{kr} + \sin(kr) \right) \right]$$

(C = Normierungskonstante). Bestimmen Sie zunächst a .

- (ii) Zeigen Sie, dass für $k \rightarrow 0$ die Streuphase $\sim (kR)^3$ ist.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Wir wollen gebundene, resonante Streuzustände für S -Wellen ($l = 0$) an einem kugelsymmetrischen Potentialtopf $V(r < R) = -V_0$, $V(r > R) = 0$ untersuchen. Dazu verwenden wir die Notation $k_0^2 = 2\mu V_0/\hbar^2$, $K^2 = 2\mu(V_0 + E)/\hbar^2$, $\kappa^2 = -2\mu E/\hbar^2$.

- (i) Sei zunächst $E < 0$. Begründen Sie die folgende Form für die Lösung der Radialgleichung (für allgemeine l)

$$R_{nl}(r) = \begin{cases} A_{nl} j_l(K_{nl} r) & r < R \\ B_{nl} H_l^{(+)}(i\kappa_{nl} r) & r > R, \end{cases}$$

wobei $H_{nl}^{(\pm)}(\rho) = -n_l(\rho) \pm i j_l(\rho)$ und

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \left(\frac{\sin \rho}{\rho} \right), \quad n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \left(\frac{\cos \rho}{\rho} \right).$$

Gewinnen Sie (im Fall $l = 0$) durch Aufstellen der Anschlußbedingungen bei $r = R$ eine Bedingung für V_0 und R , die erfüllt sein muss, damit es N gebundene S -Zustände gibt.

- (ii) Für den Fall $E > 0$ ist der folgende Ansatz für die Radialwellenfunktion zweckmäßig ($k^2 = 2\mu E/\hbar^2$):

$$R_l(r) = \begin{cases} A_l j_l(Kr) & r < R \\ B_l [\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)] & r > R, \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Streuphase δ_0 sowie den totalen Wirkungsquerschnitt für S -Streuung σ_0 . Zeigen Sie, dass im Grenzfall kleiner Energien $kR \ll 1$, $K \approx k_0$ der Wirkungsquerschnitt in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\sigma_0 = 4\pi R^2 \left[(kR)^2 + \left(\frac{KR}{\tan(KR)} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Für welche $k_0 R$ gibt es Resonanz? Wie steht das Auftreten der Resonanzen im Verhältnis zu den gebundenen Zuständen aus Teil (i)?

Hinweis:

$$\sin^2(\alpha - \beta) = \frac{(\tan \alpha \cos \beta - \sin \beta)^2}{1 + \tan^2 \alpha}$$

Aufgabe 4

(2 Punkte)

- (i) Berechnen Sie in erster Bornscher Näherung den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Teilchen der Masse μ am Potential ($V_0 > 0$)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}.$$

- (ii) Zeigen Sie, dass der Wirkungsquerschnitt im Grenzfall kleiner Energien ($kR \ll 1$) isotrop ist. Berechnen Sie für diesen Grenzfall den totalen Streuquerschnitt.