Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik D im Sommersemester 2006

Übungsblatt 1

Name: _____ Tutorium: _____

Abgabe bis Di, 2.5.06, 11:30 Punkte: _____

Aufgabe 1: *Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets* 3 Punkte

f sei die Überlagerung dreier Sinuswellen,

$$f(x,t) = \sin(\omega t - kx) + \sin((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x) + \sin((\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x)\,,$$

wobei $\Delta\omega \ll \omega$, $\Delta k \ll k$.

a) Schreiben Sie f um in die Form:

$$f(x,t) = \sin(\omega t - kx)\, B(x - v_g t)$$

und bestimmen Sie die Gruppengeschwindigkeit v_g der Einhüllenden B.
(2 Punkte)

b) Kann man die Parameter ω, k, $\Delta\omega$, Δk so wählen, daß die Gruppengeschwindigkeit v_g der Phasengeschwindigkeit $v_\phi \equiv \omega/k$ entgegengesetzt ist, daß also $v_g = -v_\phi$ gilt?
(1 Punkt)

Aufgabe 2: *Fermatsches Prinzip* 3 Punkte

Das Fermatsche Prinzip besagt, daß ein Lichtstrahl den Weg der kürzesten Laufzeit nimmt.

a) Wir wollen mit Hilfe des Fermatschen Prinzips das Brechungsgesetz von Snellius herleiten. Der Halbraum $z > 0$ sei von einem homogenen Medium mit Brechungsindex n_1 erfüllt, der Halbraum $z < 0$ habe den Brechungsindex n_2. Wir betrachten eine Klasse von Lichtwegen, die von der Lichtquelle im Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ geradlinig zum Punkt $X(x_1, x_2, x_3)$ in der Grenzebene führen und von dort wieder geradlinig zum Zielpunkt $B(b_1, b_2, b_3)$. Es sei $a_3 > 0$, $b_3 < 0$. Die Koordinaten seien so gewählt, daß A und B in der xz-Ebene liegen. Finden Sie die Laufzeit $L(a_i, x_j, b_k)$ des Lichtstrahls und minimieren Sie diese bezüglich der x_j. Leiten Sie so das Brechungsgesetz her.
(2 Punkte)

b) Fertigen Sie eine Skizze mit einlaufendem und gebrochenem Strahl an, und zwar einmal für $n_1 = 1$, $n_2 = 1.3$ und einmal für $n_1 = 1$, $n_2 = -1.3$. (1 Punkt)

Zur Zeit wird in der Tat an der Herstellung künstlicher Materialien mit negativem Brechungsindex gearbeitet, unter anderem in der AG Wegener hier in Karlsruhe. Siehe auch "Photorealistic images of objects in effective negative-index materials", `http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?id=88325`

Aufgabe 3: *Fouriertransformation* 6 Punkte

Die Fouriertransformation einer integrablen und quadratintegrablen[1] komplexwertigen Funktion $\psi(x)$ ist definiert als

$$\tilde{\psi}(k) := (\mathcal{F}\psi)(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,.$$

Die inverse Fouriertransformation lautet

$$(\mathcal{F}^{-1}\tilde{\psi})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \tilde{\psi}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,.$$

a) Zeigen Sie: $(\mathcal{F}\psi')(k) = \mathrm{i}k\tilde{\psi}(k)$. Hierbei ist $\psi'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$.
(1 Punkt)

b) Zeigen Sie:
$$\left(\mathcal{F}(\psi_1\psi_2)\right)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\, \tilde{\psi}_1(q)\, \tilde{\psi}_2(k-q)\,.$$
Dabei bezeichnet $\psi_1\psi_2$ das punktweise Produkt, $(\psi_1\psi_2)(x) = \psi_1(x)\psi_2(x)$. (1 Punkt)

c) Für Funktionen $\psi(x)$ definieren wir Verschiebung τ_a, Phasenverschiebung μ_b und Skalentransformation δ_λ durch
$$\begin{aligned}
(\tau_a\psi)(x) &:= \psi(x-a) \qquad (a \in \mathbb{R}) \\
(\mu_b\psi)(x) &:= \mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\,\psi(x) \qquad (b \in \mathbb{R}) \\
(\delta_\lambda\psi)(x) &:= \lambda^{-1/2}\,\psi(x/\lambda) \qquad (\lambda > 0)
\end{aligned}$$
Zeigen Sie:
$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\tau_a\psi)(k) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}\tilde{\psi}(k) \\
(\mathcal{F}\mu_b\psi)(k) &= \tilde{\psi}(k-b) \\
(\mathcal{F}\delta_\lambda\psi)(k) &= \lambda^{1/2}\,\tilde{\psi}(\lambda k)
\end{aligned}$$
(3 Punkte)

d) Zeigen Sie:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, |\widetilde{\psi}(k)|^2$$
(Satz von Plancherel, manchmal auch Parsevalsche Formel genannt).
(1 Punkt)

[1] integrabel: $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \psi(x)$ existiert, quadratintegrabel: $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2 < \infty$.