Theoretische Physik D - Übungsblatt 1

Philipp Jung

May 1, 2006

Aufgabe 1

a)

Ausgangssituation ist die Überlagerung dreier Wellen:

$f(x,t) = \sin(\omega t - kx) + \sin((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x) + \sin((\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x)$

$f(x,t) = \sin(\omega t - kx) + \sin((\omega t - kx) + (\Delta\omega t - \Delta kx)) + \sin((\omega t - kx) - (\Delta\omega t - \Delta kx))$

Unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme für Sinus:

$$f(x,t) = \sin(\omega t - kx) + 2\sin(\omega t - kx)\cos(\Delta\omega t - \Delta kx)$$

$$f(x,t) = \sin(\omega t - kx) * (1 + 2\cos(\Delta\omega t - \Delta kx)$$

$$f(x,t) = \sin(\omega t - kx) * (1 + 2\cos(-\Delta k(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t))$$

Somit ergibt sich für die Gruppengeschwindigkeit:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

b)

Die Gruppengeschwindigkeit kann der Phasengeschwindigkeit entgegengesetzt sein wenn gilt:

$$\frac{\omega}{k} = -\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Dies setzt voraus, dass $sign(\Delta\omega) \neq sign(\Delta k)$, was aber (zumindest mathematisch) keinen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt.

Aufgabe 2

a)

Zur berechnung der Laufzeit arbeiten wir 2-Dimensional, da alle Punkte in der X-Z-Ebene liegen! Wir definieren die Abstände der Punkte $d_1 = \overline{AX}$ und $d_2 = \overline{XB}$ wie folgt:

$$d_1 = \sqrt{{a_3}^2 + (x_1 - a_1)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{{b_3}^2 + (b_1 - x_1)^2}$$

Für die laufzeit ergibt sich mit der Formel $s = v * t$ wobei $s = d_1 + d_2$ und $v = \frac{c_0}{n}$ für das jeweilige Medium. Insgesamt für die Laufzeit L also:

$$L(d_1, d_2) = \frac{n_1}{c_0} d_1 + \frac{n_2}{c_0} d_2$$

Eingesetzt ergibt sich für L:

$$L(a_i, x_j, b_k) = \frac{n_1}{c_0}\sqrt{{a_3}^2 + (x_1 - a_1)^2} + \frac{n_2}{c_0}\sqrt{{b_3}^2 + (b_1 - x_1)^2}$$

Zur Ermittlung der minimalen Laufzeit differenzieren wir partiell nach x_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{n_1}{c_0} \frac{x_1 - a_1}{\sqrt{{a_3}^2 + (x_1 - a_1)^2}} - \frac{n_2}{c_0} \frac{b_1 - x_1}{\sqrt{{b_3}^2 + (b_1 - x_1)^2}}$$

Nun setzen wir den Term gleich 0 und resubstituieren d_1 und d_2 im Nenner:

$$0 = \frac{n_1}{c_0} \frac{x_1 - a_1}{d_1} - \frac{n_2}{c_0} \frac{b_1 - x_1}{d_2}$$

Wir verwenden nun, dass $sin(\alpha) = \frac{x_1 - a_1}{d_1}$ und $sin(\beta) = \frac{b_1 - x_1}{d_2}$:

$$n_2 sin(\beta) = n_1 sin(\alpha) \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)}$$

b)

Für $n_2 = 1.3$:

Für $n_2 = -1.3$:

Aufgabe 3

a)

Einsetzen in die Transformation und lösen des Integrals mittels partieller Integration:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \frac{d\Psi}{dx} e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\Psi e^{-ikx}\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \Psi(-ik) e^{-ikx}$$

$$= 0 + ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \Psi e^{-ikx} = ik\tilde{\Psi}$$

b)

Einsetzen der Rücktransformationen für Ψ_1 und Ψ_2 in die Transformation des Produktes:

$$F(\Psi_1\Psi_2) = \int\int\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\frac{dk_1}{\sqrt{2\pi}}\frac{dk_2}{\sqrt{2\pi}}\tilde{\Psi}_1(k_1)\tilde{\Psi}_2(k_2)e^{ik_1x}e^{ik_2x}e^{-ikx}$$

Zusammenfassen der Exponentialfunktionen und Ausführen der dx Integration. Die δ-Funktion entsteht dabei aus: $2\pi\delta(k_1+k_2-k) = \int dx e^{ix(k_1+k_2-k)}$

$$= \int\int \frac{dk_1}{\sqrt{2\pi}}dk_2\tilde{\Psi}_1(k_1)\tilde{\Psi}_2(k_2)\delta(k_1+k_2-k)$$

Ausführen der dk_2 Integration

$$= \int \frac{dk_1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{\Psi}_1(k_1)\tilde{\Psi}_2(k-k_1)$$

c)

1.

Substituiere $y = x - a$ und setze in Transformation ein:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dy\ \Psi(y)\ e^{-ik(y+a)}\ =\ e^{-ika}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dy\ \Psi(y)\ e^{-iky} = e^{-ika}\ \tilde{\Psi}$$

2.

Ohne Worte...

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx\ \Psi e^{-ix(k-b)} = \tilde{\Psi}(k-b)$$

3.

Substituiere $y = \frac{x}{\lambda}$ und $dx = \lambda\ dy$ und setze in Transformation ein:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dy\ \lambda\lambda^{-\frac{1}{2}}\ \Psi(y)\ e^{-iky\lambda} = \lambda^{\frac{1}{2}}\tilde{\Psi}(\lambda k)$$