Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik D im Sommersemester 2006

Übungsblatt 2

Name: _____ Tutorium: _____

Abgabe bis Dienstag, 9.5.06, 11:30 Punkte: _____

Aufgabe 4: *Hamiltonsche Mechanik* 6 Punkte

Die Lagrangefunktion für ein Punktteilchen der Masse m und Ladung e in einem vorgegebenen zeitunabhängigen elektromagnetischen Feld lautet:

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \tfrac{1}{2} m\,\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x})\cdot\dot{\vec{x}} - e\,\Phi(\vec{x})\,.$$

a) Bestimmen Sie den zu $\vec{x}$ kanonisch konjugierten Impuls $\vec{p}$. (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie mittels Legendretransformation die Hamiltonfunktion $H(\vec{p},\vec{x})$. (1 Punkt)

c) Finden Sie – ausgehend von der Hamiltonfunktion – die Bewegungsgleichungen. Bringen Sie diese auf die Form $m\,\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$, wobei $\vec{F}$ durch die Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ auszudrücken ist. (2 Punkte)

d) Die Poissonklammer $\{u,v\}$ zweier Funktionen $u(\vec{p},\vec{x})$, $v(\vec{p},\vec{x})$ ist definiert als

$$\{u,v\} \equiv \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}\,.$$

Schreiben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Poissonklammern $\{H,\vec{x}\}$ und $\{H,\vec{p}\}$. Berechnen Sie außerdem die Poissonklammer $\{x_k,p_j\}$. (2 Punkte)

Aufgabe 5: *Fouriertransformation einer Gaußfunktion* 6 Punkte

a) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \exp(-x^2/2)$.
(Hinweis: Schreiben Sie das Quadrat des Integrals als zweidimensionales Integral und verwenden Sie Polarkoordinaten.)

b) Zeigen Sie, daß die Fouriertransformierte der Gaußfunktion $f(x) = \exp(-x^2/2)$ gegeben ist durch $\tilde{f}(k) = \exp(-k^2/2)$.
Hinweis: Finden Sie zunächst eine Differentialgleichung erster Ordnung und eine Anfangsbedingung, die $f(x)$ eindeutig bestimmen. Führen Sie dann eine Fouriertransformation für diese Gleichung und Bedingung durch.

c) Berechnen Sie ausgehend von Teilaufgabe b) die Fouriertransformation der allgemeinen Gaußfunktion

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,,$$

indem Sie die in Aufgabe 3 definierten Operationen verwenden.

(Je 2 Punkte)