Theoretische Physik D - Übungsblatt 2

Philipp Jung

05.05.2006

Aufgabe 4

a)

Die kanonischen Impulse erhalten wir aus der Lagrange-Funktion mittels

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

in unserem Fall also

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = m \cdot \dot{\vec{x}} \; + \; \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x})$$

$$\dot{\vec{x}} \; = \; \frac{\vec{p}}{m} \; - \; \frac{e}{c \cdot m}\vec{A}(\vec{x})$$

b)

Für die allgemeine Legendre-Transformation

$$H(q_k, p_k) = \sum_k p_k \cdot \dot{q}_k \; - \; L(q_k, p_k)$$

schreiben wir zunächst die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von p_k anstelle von $\dot{q}_k$

$$L(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} \; - \; \frac{e^2}{2 \cdot m \cdot c^2}\vec{A}^2(\vec{x}) \; - \; e \cdot \Phi(\vec{x})$$

und setzen schliesslich alles in die Transformation ein. Nach Zusammenfassung der einzelnen Terme erhalten wir

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}(\vec{p}^2 \; - \; 2 \cdot \vec{p} \cdot \frac{e}{c} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \; + \; \frac{e^2}{c^2} \cdot \vec{A}^2(\vec{x})) \; + \; e \cdot \Phi(\vec{x})$$

die Hamilton-Funktion:

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{(\vec{p} \; - \; \frac{e}{c} \cdot \vec{A}(\vec{x})\,)^2}{2 \cdot m} \; + \; e \cdot \Phi(\vec{x})$$

c)

Für die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen gilt

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

in unserem Fall ergibt sich: (ab hier gilt $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x})$ bzw. $\Phi = \Phi(\vec{x})$)

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p} \; - \; \frac{e}{c} \cdot \vec{A}}{m}$$

$$\dot{\vec{p}} = \frac{e}{mc} \cdot \nabla \vec{A} \vec{p} \; - \; \frac{e^2}{m \cdot c^2} \nabla \vec{A} \vec{A} \; - \; e \cdot \nabla \Phi$$

Nun differenzieren wir $\dot{\vec{x}}$ noch einmal nach t und setzen $\dot{\vec{p}}$ ein.

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\dot{\vec{p}} \; - \; \frac{e}{c} \cdot \dot{\vec{A}}}{m} = \frac{1}{m} \{ \frac{e}{m \cdot c} \nabla \vec{A} \vec{p} \; - \; \frac{e^2}{m \cdot c^2} \nabla \vec{A} \vec{A} \; - \; e \cdot \nabla \Phi - \frac{e}{c} \dot{\vec{x}} \nabla \vec{A} \; - \; \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \}$$

Nun verwenden wir das Ergebnis aus a) $\vec{p} \; - \; \frac{e}{c} \vec{A} = m \cdot \dot{\vec{x}}$ und multiplizieren beide Seiten mit m

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \frac{e}{c} \{ \nabla \vec{A} \dot{\vec{x}} \; - \; \dot{\vec{x}} \nabla \vec{A} \; - \; \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \} \; - \; e \cdot \nabla \Phi$$

Da es sich um zeitunabhängige Felder handelt verschwindet $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Für den Rest wenden wir noch die Identität des Kreuzproduktes an $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} \; - \; (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ und freuen uns über das altbekannte Ergebnis:

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = e \cdot \vec{E} \; + \; \frac{e}{c} \dot{\vec{x}} \times (\nabla \times \vec{A}) = e \cdot \vec{E} \; + \; \frac{e}{c} \dot{\vec{x}} \times \vec{B}$$

d)

Betrachten wir zunächst die beiden Poisson-Klammern mit H:

$$\{H, \vec{x}\} = \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{p}}}_{=0} \; - \; \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}}}_{=1} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$$

$$\{H, \vec{p}\} = \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{p}}}_{=1} \; - \; \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{x}}}_{=0} = \frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$$

Somit kann man die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auch schreiben als:

$$\dot{\vec{x}} = -\{H, \vec{x}\}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\{H, \vec{p}\}$$

Desweiteren sollte noch berechnet werden

$$\{\vec{x}, \vec{p}\} = \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{p}}}_{=1} \; - \; \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{p}}}_{=0} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{x}}}_{=0} = 1$$

Aufgabe 5

a)

Wir schreiben als zweidimensionales Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \, e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$$

und in Polarkoordinaten:

$$= \int_0^\infty r \cdot dr \int_0^{2\pi} d\phi \; e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \; e^{-\frac{r^2}{2}} = 2 \cdot \pi \int_0^\infty dr \; r \cdot e^{-\frac{r^2}{2}}$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^\infty dr \; - \frac{d}{dr} \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} = 2\pi \cdot \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{-\infty} = 2\pi$$

Wir führen nun das Ergebnis des 2-dimensionalen Falles auf den 1-dimensionalen Fall zurück indem wir die Wurzel ziehen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

b)

Wir setzen in die Fourier-Transformation ein und erweitern dann mit $1 = e^{\frac{k^2}{2}} \cdot e^{-\frac{k^2}{2}}$:

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-ikx} \cdot e^{\frac{k^2}{2}} \cdot e^{-\frac{k^2}{2}}$$

Wir ziehen nun einen Term vor das Integral und fassen die restlichen e-Funktionen zusammen:

$$\tilde{f} = e^{-\frac{k^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-ikx} \cdot e^{\frac{k^2}{2}} = e^{-\frac{k^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2}$$

Wir substituieren nun $z = x + ik$ und $dz = dx$

$$\tilde{f} = e^{-\frac{k^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \; e^{-\frac{z^2}{2}}}_{=\sqrt{2\pi}} = e^{-\frac{k^2}{2}}$$

c)

Es handelt sich hier um eine Verschiebung um $a = \mu$ und eine Skalentransformation um $\lambda = \sigma^2$. Beide Transformationen findet man in Aufgabe 3 wieder. Es ergibt sich als Fourier-Transformierte:

$$\tau_a \delta_\lambda \tilde{f} = e^{-ika} \cdot \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \tilde{f}(\lambda \cdot k) = e^{-ik\mu} \cdot \sigma \cdot e^{-\frac{(k \cdot \sigma^2)^2}{2}}$$