Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik D im Sommersemester 2006

Übungsblatt 3

Name: _____ Tutorium: _____

Abgabe bis Dienstag, 16.5.06, 11:30 Punkte: _____

Aufgabe 6: *Gaußsches Wellenpaket* 4 Punkte

Wir betrachten ein freies Teilchen der Masse m in einer Dimension. Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion gegeben durch

$$\psi(x,0) = \int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{-\alpha\,(k-k_0)^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,.$$

Die Zeitentwicklung des Wellenpaketes ergibt sich aus der Schrödingergleichung. Berechnen Sie $\psi(x,t)$. Bringen Sie die Wellenfunktion auf die Form

$$\psi(x,t) = N\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi(x,t)}\,\exp\left[-\frac{(x-x_0(t))^2}{4\sigma(t)^2}\right],$$

wobei N ein orts- und zeitunabhängiger Normierungsfaktor ist und $\phi(x,t) \in \mathbb{R}$ die Phase des Wellenpakets. Die Einhüllende hat die Form einer Gaußfunktion, die am Ort $x_0(t)$ zentriert ist. Bestimmen Sie explizit N, $\phi(x,t)$, $x_0(t)$ und $\sigma(t)$. Sie können folgendes Standardintegral verwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\,(x+\mathrm{i}y)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sqrt{\pi}\,.$$

Aufgabe 7: *Klassische Potentialstufe* 2 Punkte

Wir betrachten ein klassisches Punktteilchen der Masse m in einer Dimension im Potential $V(x) = V_0\theta(x)$ (θ ist die Heaviside-Funktion). Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung auf und finden Sie die allgemeine Lösung.

Hinweis: Betrachten Sie die Bereiche $x < 0$ und $x > 0$ zunächst getrennt und setzen Sie $x(t)$ stetig zusammen. Setzen Sie dann $x(t)$ in die Newtonsche Gleichung ein. Multiplizieren Sie mit $\dot{x}$ und integrieren Sie.

Aufgabe 8: *Potentialtopf: Transfermatrix und Streuzustände* 6 Punkte

a) Wir betrachten zunächst die Potentialstufe $V(x) = V_1 + \theta(x - x_0)\,(V_2 - V_1)$. Wie Sie aus der Vorlesung wissen, hat die Wellenfunktion eines stationären Zustandes die Form

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 x} + B_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 x} & (x \le x_0) \\ A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 x} + B_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 x} & (x > x_0) \end{cases}$$

Geben Sie k_1, k_2 in Abhängigkeit von der Energie E des Zustands und von V_1, V_2 an. Dabei sei entweder $k_i \ge 0$ oder $k_i = \mathrm{i}\kappa_i$ mit $\kappa_i \ge 0$. Wir definieren die Transfermatrix $M(x_0; k_1, k_2)$ durch:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M(x_0; k_1, k_2) \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die komplexe 2×2-Matrix $M(x_0; k_1, k_2)$, indem Sie die Anschlußbedingungen an der Stelle x_0 auswerten. Hinweis: Wenn man die Wellenfunktion für $x_0 = 0$ kennt, kann man einfach die Ortskoordinate verschieben.
(2 Punkte)

b) Wir betrachten nun den Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 < 0 & \text{falls } 0 \le x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Stellen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion stationärer Zustände auf. Mit Hilfe der Transfermatrix aus Aufgabenteil a) können Sie die Anschlußbedingungen lösen. Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen den Ansatzkoeffizienten für $x > b$ und denen für $x < 0$ her, indem Sie zwei Transfermatrizen multiplizieren. Ist dieser Zusammenhang linear?
(2 Punkte)

c) Betrachten wir nun speziell den Fall $E > 0 > -V_0$. Wie viele freie Parameter (Koeffizienten in der Wellenfunktion) gibt es für festes E? Wieviele davon sind "physikalisch"?

Wir betrachten die physikalische Situation, daß eine Welle von links ($x < 0$) einläuft und teilweise durch den Potentialtopf läuft, teilweise reflektiert wird. Welcher Bedingung an die Koeffizienten der Wellenfunktion entspricht diese Situation? Berechnen Sie den Transmissionskoeffizienten T, der (für diesen Fall) definiert ist als das Verhältnis der Betragsquadrate der Amplituden von im Bereich $x < 0$ ein- und im Bereich $x > b$ auslaufender Welle. Wann wird T maximal?
(2 Punkte)