Theoretische Physik D - Übungsblatt 3

Philipp Jung

12.05.2006

Aufgabe 6

Für die Zeitabhängige Wellengleichung setzen wir an

$$\Psi(x,t) = \int \, dk \; e^{-\alpha\,(k\,-\,k_0)^2\,+\,i(kx\,-\,\frac{E\cdot t}{\hbar})}$$

Wir verwenden $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m}$

$$\Psi(x,t) = \int \, dk \; e^{-\alpha\,(k\,-\,k_0)^2\,+\,i(kx\,-\,\frac{\hbar\cdot k^2\cdot t}{2m})}$$

Nun müssen wir den Exponenten umformend um das Integral entsprechend dem Hinweis auf dem Aufgabenblatt zu lösen. Dies ist nicht ganz einfach und wir substituieren deswegen der Übersicht halber $a^2 = \alpha\,+\,\frac{i\cdot\hbar\cdot t}{2m}$ und $b = 2\cdot\alpha\,+\,i\cdot x$. Nun können wir das Integral ähnlich der angegebenen Form schreiben als:

$$\Psi(x,t) = \int dk \; e^{-a^2\cdot(k\,-\frac{b}{2\cdot a^2})^2\,+\,\frac{b^2}{4\cdot a^2}\,+\,\alpha\cdot k_0^2}$$

Die von k unabhängigen Teile des Exponenten ziehen wir nun vor das Integral und lösen den Rest mittels des angegebenen Standardintegrals. Als Ergebnis erhalten wir

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{a^2}} \cdot e^{\frac{b^2}{4\cdot a^2}\,+\,\alpha\cdot k_0^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\,+\,\frac{i\cdot\hbar\cdot t}{2m}}} \cdot e^{\frac{(2\cdot\alpha\,+\,i\cdot x)^2}{4\cdot\alpha\,+\,\frac{i\cdot 2\cdot\hbar\cdot t}{m}}\,+\,\alpha\cdot k_0^2}$$

Im Prinzip ist die Funktion somit feritg. Allerdings müssen wir sie noch auf die in der Aufgabenstellung geforderte Form bringen indem wir ein paar zeitraubende und enorm hässliche Umformungen an ihr vornehmen.
Zunächst fassen wir den Exponenten in einem großen Bruch zusammen,

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\,+\,\frac{i\cdot\hbar\cdot t}{2m}}} \cdot e^{\frac{-x^2\,+\,i2\alpha k_0 x\,-\,i\frac{2\alpha k_0^2\hbar t}{m}}{4\alpha\,+\,i\frac{2\hbar t}{m}}}$$

multiplizieren dann Zähler und Nenner mit dem konjugiert komplexen des Nenners $4\alpha\,-\,i\frac{2\hbar t}{m}$ um Real- und Imaginärteil des Exponenten zu trennen. Mit dem Ergebnis

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\,+\,\frac{i\cdot\hbar\cdot t}{2m}}} \cdot e^{\frac{-4\alpha\cdot(x^2\,-\,\frac{k_0 x\hbar t}{m}\,+\,\frac{\hbar^2 t^2 k_0^2}{m^2})+i(8\alpha^2 k_0 x\,-\,8\alpha^2 k_0^2\frac{\hbar t}{m}\,+\,\frac{2x^2\hbar t}{m})}{16\alpha^2\,-\,\frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}}}$$

können wir den Realteil nun zu einer binomischen Formel zusammenfassen. Außerdem schreiben wir Real- und Imaginärteil in 2 verschiedene e-Funktionen, so dass die vorgegebene Form eingehalten ist:

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\,+\,\frac{i\cdot\hbar\cdot t}{2m}}} \cdot e^{i\frac{4\alpha^2\cdot(k_0 x\,-\,\frac{k_0^2\hbar t}{m})\,+\,\frac{x^2\hbar t}{m}}{8\alpha^2\,-\,\frac{2\hbar^2 t^2}{m^2}}} \cdot e^{\frac{(x\,-\,\frac{\hbar t k_0}{m})^2}{4(\sqrt{\frac{\hbar t}{2m}}\,-\,\alpha)}}$$

Aus diesem Ergebnis lesen wir nun die gesuchten Werte ab:

$$N(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha \ + \ \frac{i \cdot \hbar \cdot t}{2m}}}$$

$$\Phi(x,t) = \frac{4\alpha^2 \cdot (k_0 x \ - \ \frac{k_0^2 \hbar t}{m}) \ + \ \frac{x^2 \hbar t}{m}}{8\alpha^2 \ - \ \frac{2\hbar^2 t^2}{m^2}}$$

$$x_0(t) = \frac{\hbar t k_0}{m}$$

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{\hbar t}{2m}} \ - \ \alpha$$