Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

**Theoretische Physik D im Sommersemester 2006**

# Übungsblatt 4

Name: _____ Tutorium: _____

Abgabe bis Dienstag, 23.5.06, 11:30 Punkte: _____

**Aufgabe 9:** *Potentialtopf: gebundene Zustände* 8 Punkte

a) Wir betrachten wieder den Potentialtopf aus Aufgabe 8,

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 < 0 & \text{falls } 0 \leq x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

und zwar speziell den Fall $0 \geq E \geq -V_0$. In den Bereichen, in denen die Wellenzahl $k_i$ imaginär wird, schreiben wird: $k_i = \mathrm{i}\kappa_i$ ($\kappa_i \geq 0$). Schreiben Sie die Wellenfunktion eines stationären Zustandes für die drei Bereiche konstanten Potentials nochmals mit diesen Bezeichnungen auf und nennen Sie die Anschlußbedingungen für die Wellenfunktion $\psi(x)$.
(1 Punkt)

b) Divergente Wellenfunktionen sind nicht akzeptabel. Was muß daher für die Koeffizienten in der Wellenfunktion im Bereich $x > b$ gelten?

Bis auf Normierung und Phase liegt damit die Wellenfunktion im Bereich $x > b$ eindeutig fest. Finden Sie mit Hilfe der Transfermatrizen aus Aufgabe 8b) die Form der Wellenfunktion im Bereich $x < 0$.
(2 Punkte)

c) Welche zusätzliche Bedingung muß im Bereich $x < 0$ für eine physikalisch akzeptable Wellenfunktion gelten? Leiten Sie hieraus eine Bedingung für die erlaubten Energiewerte her. Bringen Sie die Bedingung auf die Form:

$$k_2 \sim \cos(k_2 b/2) \text{ oder } k_2 \sim \sin(k_2 b/2) ,$$

wobei $k_2$ die Wellenzahl im Bereich des Potentialtopfes ist.
(3 Punkte)

d) Wieviele gebundene Zustände gibt es in Abhängigkeit von der Breite und Tiefe des Potentialtopfes?
(1 Punkt)

e) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie unter Verwendung der groben Näherung: $\cos x \approx 1 - (2x/\pi)^2$.
(1 Punkt)

**Aufgabe 10:** *Atomare Skalen* 2 Punkte

Aus den Naturkonstanten $\hbar$, $e$ (Elementarladung, $e > 0$) und $m_e$ (Elektronmasse) läßt sich eine Größe $a_0$ der Dimension Länge gewinnen,

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e\, e^2}$$

(in SI-Einheiten). Geben Sie den Wert von $a_0$ in m und Ångström an. Machen Sie die Schrödingergleichung für ein Elektron in einem Potential $V(x)$ mit Hilfe der Länge $a_0$ dimensionslos. Die sich ergebenden Vorfaktoren von $\mathrm{i}\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ und $V(x)$ definieren eine charakteristische Zeit- bzw. Energieskala. Geben Sie deren Werte in Sekunden bzw. eV an.

**Aufgabe 11:** *Wahrscheinlichkeiten* 2 Punkte

In der Milchstraße gibt es ca. $N = 10^{11}$ Sterne. Wir machen die folgenden frei erfundenen Annahmen: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Stern einen Planeten hat, ist $p_1 = 0.01$. Die Wahrscheinlichkeit, daß auf einem Planeten lebensfreundliche Bedingungen herrschen, ist $p_2 = 0.01$. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich auf einem lebensfreundlichen Planeten tatsächlich Leben entwickelt, ist $p_3 = 0.01$. Der Einfachheit halber nehmen wir weiter an, daß es keine Sonnensysteme mit mehr als einem Planeten gibt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es in einem zufällig ausgewählten Sonnensystem Leben gibt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es in der Milchstraße auf mindestens einem Planeten Leben gibt? (Hinweis: Betrachten Sie die negierte Aussage)

(Je 1 Punkt)