Theoretische Physik D - Übungsblatt 4

Philipp Jung

18.05.2006

Aufgabe 9

a)

Zunächst war nach der Wellenfunktion eines stationären Zustandes gefragt:

$$\Psi = \begin{cases} A_1 \cdot e^{ik_1x} \ + \ B_1 \cdot e^{-ik_1x} & x < 0 \\ A_2 \cdot e^{ik_2x} \ + \ B_2 \cdot e^{-ik_2x} & 0 \leq x < b \\ A_3 \cdot e^{ik_1x} \ + \ B_3 \cdot e^{-ik_1x} & x \geq b \end{cases}$$

Wobei hier natürlich der erste bzw letzte Teil für $x \to -\infty$ bzw $x \to +\infty$ verschwinden muss! (Die Bedingungen hierfür sind allerdings Gegenstand einer späteren Teilaufgabe.)
Was die Anschlussbedingungen angeht, so müssen über den gesamten Bereich Ψ und $\frac{d}{d\times}\Psi$ stetig sein.

b)

Für den Bereich $x > b$ muss die Wellenfunktion für $x \to +\infty$ verschwinden. Diese Bedingung wird nur erfüllt, wenn $A_3 = 0$ ist. Außerdem muss der Exponent reel sein, damit wir einen exponentiellen Abfall erhalten. Dies ist ist schon aus den Anfangsbedingungen gewährleistet, da k_1 imaginär ist (folgt aus $E < 0$ und $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$).
Um die Koeffizienten im Bereich $x < 0$ zu finden, wenden wir die Transfermatrix auf die (bekannten) Koeffizienten im Bereich $x \geq b$ an:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \tilde{M}(k_1, k_2, b) \cdot \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

Da wir netterweise A_3 schon 0 gesetzt haben, ergeben sich folgende Bedingungen für A_1 und B_1:

$$A_1 = M_2 \cdot B_3 = \frac{B_3}{4k_1k_2} \cdot \Big((k_2^2 - k_1^2) e^{-i(k_1-k_2)b} + (k_1^2 - k_2^2) e^{i(k_2-k_1)b} \Big)$$

$$B_1 = M_4 \cdot B_3 = \frac{B_3}{4k_1k_2} \cdot \Big((k_2 + k_1)^2 e^{i(k_2-k_1)b} - (k_1 - k_2)^2 e^{-i(k_1+k_2)b} \Big)$$

c)

Analog zu unserer Betrachtung für $x \geq b$ muss die Wellenfunktion hier natürlich für $x \to -\infty$ verschwinden. Deswegen muss $B_1 = 0$ sein. Verwendet man dies nun in der Gleichung für B_1 aus Teilaufgabe b), so kann man diese umformen zu:

$$(k_1 + k_2)^2 e^{i(k_2-k_1)b} = (k_1 - k_2)^2 e^{i(k_1+k_2)b}$$

$$\frac{k_2 + k_1}{-(k_2 - k_1)} = \pm e^{-ik_2b}$$

Nun schreiben wir $k_1 = i\kappa$ und formen die linke Seite der Gleichung in die Euler'sche Darstellung um. Dabei Nutzen wie aus, dass Der Nenner des Bruches genau das konjugiert Komplexe des Zählers ist und sich der Betrag somit wegkürzt:

$$e^{2i\ atan(\frac{\kappa}{k_2})} = \mp e^{-ik_2b}$$

Betrachten wir nun die 2 Fälle:
Fall 1 "-":
Wir schreiben das - als $e^{i\pi}$, damit ergibt sich für die Gleichheit der Exponenten:

$$2i\ atan(\frac{\kappa}{k_2}) = -ik_2b + i\pi$$

$$\kappa = k_2 \cdot tan(-\frac{k_2b}{2} + \frac{\pi}{2}) = -k_2 \cdot tan(\frac{k_2b}{2} - \frac{\pi}{2}) = -k_2\frac{sin(\frac{k_2b}{2} - \frac{\pi}{2})}{cos(\frac{k_2b}{2} - \frac{\pi}{2})} = k_2\frac{cos(\frac{k_2b}{2})}{sin(\frac{k_2b}{2})}$$

Fall 2 "+":
Analoge Rechnung (nur ohne $e^{i\pi}$) führt zu

$$\kappa = -k_2\frac{sin(\frac{k_2b}{2})}{cos(\frac{k_2b}{2})}$$

Aus diesen beiden Formen sind die Abhängigkeiten klar ersichtlich.

d)

Aus c) wissen wir dass $-\frac{\kappa}{k_2} = tan(\frac{k_2b}{2})$. Setzen wir dies nun in $\frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$ ein erhalten wir für $tan(\frac{k_2b}{2}) > 0$:

$$\frac{1}{cos^2(\frac{k_2b}{2})} = \frac{k^2 + \kappa^2}{k^2}$$

$$\left|cos(\frac{k_2b}{2})\right| = \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + \kappa^2}}$$

Gleichermaßen finden wir auch für $tan(\frac{k_2b}{2}) < 0$

$$\left|sin(\frac{k_2b}{2})\right| = \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + \kappa^2}}$$

Graphisch kann man nun erkennen, dass für die Anzahl der Schnittpunkte zwischen den Cos bzw Sin Halbwellen (unter den entsprechenden Nebenbedingungen) und der Geraden mit der Steigung $\frac{1}{\sqrt{k_2^2+\kappa^2}}$ ein von b und k_2 abhängiger Zusammenhang besteht. Grob könnte man ihn in etwa mit

$$n \leq \frac{k_2a}{\pi}$$

abschätzen.

e)

Mit der gegeben Näherung, die wir in die Gleichung der Cos-Halbwelle einsetzen erhalten wir:

$$1 - \left(\frac{k_2^2b^2}{\pi^2}\right) = \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + \kappa^2}}$$

Im Grundzustand nehmen wir dann an dass $\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V_0}$. Daraus ergibt sich:

$$1 - \left(\frac{k_2^2 b^2}{\pi^2}\right) = \underbrace{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{E - V_0}{V_0}}}_{=0}$$

$$-\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)b^2 = \pi^2$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb} - V_0$$

Aufgabe 10

Der Wert des Bohrschen Radius:

$$a_0 \approx 0,53 \mathring{A} \approx 5,3 \cdot 10^{-11} m$$

In der Schrödingergleichung für ein Teilchen in einem Potential

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V\Psi$$

multiplizieren wir zunächst beide Seiten mit $\frac{2m}{\hbar^2}$ so dass $\Delta\Psi$ alleine steht.

$$i\frac{2m}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} V\Psi$$

Wie wir an $\Delta\Psi$ unschwer erkennen können, haben nun alle Terme die Einheit $\frac{1}{m^2}$. Also multiplizieren wir beide Seiten mit a_0^2 um die Terme wirklich dimensionslos zu machen.

$$i\frac{2ma_0^2}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -a_0^2 \Delta\Psi + \frac{2ma_0^2}{\hbar^2} V\Psi$$

Für die charakteristische Zeitskala gilt also

$$\frac{2m_e a_0^2}{\hbar} \approx 4,85 \cdot 10^{-17} s$$

$$\frac{2ma_0^2}{\hbar^2} \approx \frac{1}{13,6\ eV}$$

Aufgabe 11

a)

Die Wahrscheinlichkeit in einem zufällig gewählten Sonnensystem einen Planeten vorzufinden ist 0,01. Auf diesem dann auch lebensfreundliche Bedingungen vorzufinden ist dann $0,01^2$. Auf diesem dann tasächlich auch Leben zu finden ist dann also $0,01^3 = 10^{-6}$.

b)

Die negierte Aussage wäre: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit auf keinem Planeten Leben vorzufinden. Dies berechnen wir mit:

$$q = (1 - 10^{-6})^N \approx 0$$

Demnach ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür auf mindestes einem Planeten Leben vorzufinden

$$p = 1 - q \approx 1$$

gleich 1. We are not alone :)