Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik D im Sommersemester 2006

Übungsblatt 5

Name: _____ Tutorium: _____

Abgabe bis Dienstag, 30.5.06, 11:30 Punkte: _____

Aufgabe 12: *Gaußverteilung* 4 Punkte

Gegeben sei die Gaußverteilung

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Zeigen Sie:

a) $\langle x\rangle = \mu$ (2 Punkte)

b) $\langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle = \sigma^2$ (2 Punkte)

Hinweis: $\phi(x)$ sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Zufallsvariable X. Es muß gelten: $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\,\phi(x) = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, für X einen Wert zwischen x_1 und x_2 zu finden, ist

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\,\phi(x)\,.$$

Ist $g(X)$ eine Funktion der Zufallsvariablen X, so ist der Erwartungswert von $g(X)$ definiert als

$$\langle g(X)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\,g(x)\,\phi(x)\,.$$

Wir unterscheiden hier und in allen weiteren Aufgaben nicht sauber zwischen X und x.

Wussten Sie, dass fast alle Menschen mehr Beine haben als der Durchschnitt?

Aufgabe 13: *Potentialtopf: Resonanzstreuung eines Wellenpaketes* 7 Punkte

Diese Aufgabe schließt direkt an Aufgabe 8c an.

a) Berechnen Sie die Phasenverschiebung $\delta(k)$ zwischen der von links einlaufenden und der nach rechts auslaufenden Welle. (2 Punkte)

b) Eine Resonanz liegt vor, wenn der Transmissionskoeffizient maximal wird. In der Nähe einer Resonanz schreiben wir $k^2 = 2m(E_R + \epsilon)/\hbar^2$, wobei E_R die Resonanzenergie ist. Zeigen Sie, daß die Streuphase δ für kleine ϵ die Form

$$\delta \approx -kb - \arctan\left(\frac{2}{\Gamma}\,\epsilon\right) + \text{const}$$

hat und bestimmen Sie die Konstante Γ. (2 Punkte)

c) Bauen Sie aus den stationären Streuzuständen ein Wellenpaket zusammen:

$$\psi(x,t) = \int \mathrm{d}k\, g(k)\, \phi_k(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\,,$$

wobei $\phi_k(x)$ die stationären Streuzustände aus Aufgabe 8c sind. $g(k)$ habe ein Maximum für $E(k) \equiv \hbar^2 k^2/(2m) = E_R$. Das Maximum von $\psi(x,t)$ befindet sich ungefähr dort, wo die Streuzustände konstruktiv interferieren. Dies ist dort der Fall, wo die Phase bezüglich k stationär ist. Finden Sie so den Ort des Maximums von $\psi(x,t)$ für den einlaufenden und den auslaufenden Anteil. (2 Punkte)

d) Skizzieren Sie die Trajektorie des Maximums in einem x–t–Diagramm für den Fall einer scharfen Resonanz (Γ klein). Zeichnen Sie zum Vergleich die Trajektorie eines klassischen Teilchens ein. (1 Punkt)