Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik D im Sommersemester 2006

Übungsblatt 7

Name: _____ Tutorium: _____

Abgabe bis Dienstag, 13.6.06, 11:30 Punkte: _____

Aufgabe 17: *Unschärferelation* 3 Punkte

Zeigen Sie unter Verwendung der Unschärferelation für Ort und Impuls, daß die kinetische Energie eines Teilchens in einer Dimension folgendermaßen nach unten beschränkt ist:

$$\langle H_{\text{kin}} \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m\langle x^2 \rangle}$$

Bemerkung: Diese Relation erklärt die Stabilität des Wasserstoffatoms: Das Potential ist zwar nach unten unbeschränkt, doch die kinetische Energie nimmt mit abnehmendem Radius stark zu.

Aufgabe 18: *Vollständigkeit* 3 Punkte

Betrachten Sie den von den Funktionen 1, $\sin x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$ aufgespannten Vektorraum (der Definitionsbereich der Funktionen sei $[0, 2\pi]$). Bestimmen Sie die Dimension des Raumes. Geben Sie eine Basis an und zeigen Sie deren Vollständigkeit und lineare Unabhängigkeit.

Aufgabe 19: *Orthogonale Polynome* 6 Punkte

Der Raum der Polynome über dem Intervall $[a, b]$ wird aufgespannt von der Menge

$$B := \{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}\,.$$

Durch

$$\langle p_1 | p_2 \rangle := \int_a^b \mathrm{d}x\, g(x)\, p_1(x) p_2(x)\,,$$

$g(x) \geq 0$ und stetig, sei ein Skalarprodukt gegeben (p_1, p_2 sind Polynome). Mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens kann man ausgehend von B ein System von orthogonalen Polynomen konstruieren.

a) Wir betrachten den Fall $a = -1$, $b = 1$, $g(x) = 1$. Bestimmen Sie ausgehend von der Basis B die ersten 3 orthogonalen Polynome P_0, P_1, P_2 (der Grad in x ist ≤ 2). Bestimmen Sie auch die Norm $||P_k|| = \sqrt{\langle P_k | P_k \rangle}$ $(k = 0 \dots 2)$.

b) Wir betrachten ein zweites Beispiel: $a = 0$, $b = \infty$, $g(x) = e^{-x}$. Bestimmen Sie wieder die ersten 3 orthogonalen Polynome L_0, L_1, L_2 sowie deren Norm.