Theoretische Physik D - Übungsblatt 7

Philipp Jung

11.06.2006

Aufgabe 17

a)

Hierfür benötigen wir zunächst den Hamilton-Operator nur für die kinetische Energie:

$$\langle H_{kin}\rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m}$$

Nun erinnern wir uns an die definition der Standardabweichung

$$\Delta a = \sqrt{\langle a^2\rangle - \langle a\rangle^2}$$

und ersetzen oben $\langle p^2 \rangle$:

$$\langle H_{kin}\rangle = \frac{(\Delta p)^2 + \langle p\rangle^2}{2m}$$

Laut Aufgabenstellung (und auch intuitiv) soll man über die Unschärferelation vorgehen, die wir deshalb etwas zu unseren Zwecken umformen:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \to (\Delta x)^2 \cdot (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\to (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4 \cdot (\Delta x)^2} \to (\Delta p)^2 + \langle p\rangle^2 \geq \frac{\hbar^2}{4 \cdot (\Delta x)^2} + \langle p\rangle^2$$

$$\to \frac{(\Delta p)^2 + \langle p\rangle^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8m \cdot (\Delta x)^2} + \frac{\langle p\rangle^2}{2m}$$

und siehe da: es sieht so aus wie unser $\langle H_{kin}\rangle$, alles was wir noch tun müssen ist die beiden zu verbinden und nochmals die Definition der Standardabweichung einzusetzen:

$$\langle H_{kin}\rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m \cdot (\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2)} + \frac{\langle p\rangle^2}{2m}$$

Wählen wir nun unser Koordinatensystem so, dass sich das Teilchen um den Ursprung bewegt (wie z.B. das Elektron im Atom mit Koordinatenursprung im Zentrum) so wird $\langle x\rangle = 0$ und $\langle p\rangle = 0$ und es ergibt sich:

$$\langle H_{kin}\rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m \cdot \langle x^2\rangle}$$

Aufgabe 17

Die Dimension des angegebenen Raumes ist 4 und eine mögliche Basis wäre z.B: $1, sin(x), sin^2(x), sin(2x)$. Vollständigkeit ist gegeben, da:

$$cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$$

und

$$cos(2x) = 1 - 2sin^2(x)$$

Lineare Unabhängigkeit folgt aus

$$\lambda_1 + \lambda_2 \cdot sin(x) + \lambda_3 \cdot sin^2(x) + \lambda_4 \cdot sin(2x) = 0 \ \ \forall x$$

nur wenn alle $\lambda_i = 0$. λ_1 muss direkt 0 sein, da es der für $x = 0$ als einziger Term einen Beitrag liefert. Für den Rest überlegen wir uns Gegenbeispiele:

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \lambda_2 = -\lambda_3$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 \rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Bleibt nur noch λ_4 und es ist einsichtig, dass $\lambda_4 \cdot sin(2x) = 0$ nur dann für alle x gilt, wenn $\lambda_4 = 0$. Somit sind die Funktionen linear unabhängig!

Aufgabe 19

a)

Wir benutzen das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren:

$$P_0 = 1$$

$$|P_0| = \sqrt{\langle 1|1\rangle} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} dx} = \sqrt{2}$$

$$P_1 = x - \underbrace{\frac{\int_{-1}^{1} x\ dx}{\int_{-1}^{1} dx}}_{=0} = x$$

$$|P_1| = \sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{[\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$P_2 = x^2 - \underbrace{\frac{\int_{-1}^{1} x^2\ dx}{\int_{-1}^{1} dx}}_{=\frac{1}{3}} - \underbrace{\frac{\int_{-1}^{1} x^3\ dx}{\int_{-1}^{1} x^2\ dx}}_{=0} = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$|P_2| = \sqrt{\left\langle x^2 - \frac{1}{3}|x^2 - \frac{1}{3}\right\rangle} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} dx\ x^4 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3}x^2} = \sqrt{\frac{8}{45}}$$

b)

Hier gibt es im wesentlichen nichts anderes zu tun, als die veränderte Definition des Skalarproduktes zu verwenden:

$$L_0 = 1$$

$$|L_0| = \sqrt{\langle 1|1\rangle} = \sqrt{\int\limits_0^\infty e^{-x}dx} = 1$$

$$L_1 = x - \frac{\int\limits_0^\infty xe^{-x}dx}{\int\limits_0^\infty e^{-x}dx} = x - \frac{[-xe^{-x}]_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-x}dx}{[-e^{-x}]_0^\infty} = x - \frac{0+1}{-1} = x - 1$$

$$|L_1| = \sqrt{\langle x-1|x-1\rangle} = \sqrt{\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}dx - 2\int\limits_0^\infty xe^{-x}dx + \int\limits_0^\infty e^{-x}dx} = \sqrt{2-2+1} = 1$$

$$L_2 = x^2 - \underbrace{\frac{\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}dx}{\int\limits_0^\infty e^{-x}dx}}_{=2} - \underbrace{\frac{\int\limits_0^\infty x^3e^{-x}dx}{\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}dx}x}_{=4x-4} = x^2 - 4x + 2$$

$$|L_2| = \sqrt{\langle x^2-4x+2|x^2-4x+2\rangle} = ... = 2$$