Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

**Theoretische Physik D im Sommersemester 2006**

# Übungsblatt 8

Name: ______________________ Tutorium: ____________

Abgabe bis Dienstag, 20.6.06, 11:30 Punkte: ____________

**Aufgabe 20:** *Eigenwerte einer Matrix* 4 Punkte

a) Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ist $B$ hermitesch? Sind die Eigenwerte reell? Bilden die Eigenvektoren eine Basis?

b) Gegeben sei die unendliche Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die hermitesch konjugierte Matrix $N = M^\dagger$ sowie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren des Produktes $MN$.

(je 2 Punkte)

**Aufgabe 21:** *Unschärferelation* 3 Punkte

Die allgemeine Unschärferelation für zwei hermitesche Operatoren $A$, $B$ mit $[A, B] = \mathrm{i}C$ lautet

$$(\Delta A)^2\,(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4}\,|\langle C\rangle|^2 .$$

Wenden Sie diese Relation auf die Operatoren $H = p^2/(2m)+V(x)$ und $x$ an um zu zeigen, daß Energieeigenzustände mit endlicher Ortsunschärfe einen verschwindenden Impulserwartungswert haben.

**Aufgabe 22:** *Freier Fall und springender Ball* 5 Punkte

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen der Masse m in einem homogenen Kraftfeld in einer Dimension lautet:

$$H = p^2/(2m) - Fx\,.$$

a) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung in der Impulsdarstellung.
(2 Punkte)

b) Finden Sie durch Fouriertransformation die Wellenfunktion im Ortsraum. Stellen Sie diese durch die Airyfunktion dar.
(2 Punkte)

c) Wir fügen nun eine undurchdringliche Wand bei $x = 0$ hinzu. Es muß also gelten: $\psi(x) = 0$ für $x \leq 0$. Die erste Ableitung $\psi'$ braucht bei $x = 0$ nicht stetig zu sein. Finden Sie die niedrigsten drei Energieeigenwerte.
(1 Punkte)

Die Airy-Funktion $\mathrm{Ai}(x)$ ist definiert als

$$\mathrm{Ai}(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\cos\left(t^3/3 + xt\right)\,.$$

Die ersten Nullstellen von $\mathrm{Ai}(x)$ liegen bei $-2.33811$, $-4.08795$, $-5.52056$, $-6.7867144$, $-7.94413$, $-9.02265$. Die Airy Funktion wurde 1838 von dem britischen Astronomen George Biddell Airy eingeführt, um die Intensitätsverteilung des Lichts in einem Regenbogen zu beschreiben, siehe `http://www.europhysicsnews.com/full/37/article3.pdf`. Weitere Eigenschaften der Airy-Funktion finden Sie unter `http://en.wikipedia.org/wiki/Airy_function`.