Theoretische Physik D - Übungsblatt 8

Philipp Jung

18.06.2006

Aufgabe 20

a)

Wir betrachten die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit eine Matrix hermitesch ist, muss sie gleich ihrer Adjungierten sein. Allgemein bedeutet adjungieren komplex konjugieren und dann transponieren. In diesem Falle wäre also die Adjungierte von B

$$B^\dagger = B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq B$$

Somit ist B nicht hermitesch!
die Eigenwerte einer 2x2 Matrix berechnen wir über das characteristische Polynom:

$$det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \mathbb{1}\right) = (1-\lambda)^2 = 0$$

Damit sind die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = 1$$

reell und die Eigenvektoren

$$\vec{e}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

bilden keine Basis, da sie nicht linear unabhängig sind.

b)

Die Adjungierte finden wir bei dieser rein reelen Matrix wieder durch einfaches Transponieren:

$$N = M^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & .. \\ 1 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 2 & 0 & .. \\ 0 & 0 & 3 & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Das Matrixprodukt MN ist dann also

$$MN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 4 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 0 & 9 & 0 & .. \\ 0 & 0 & 0 & 16 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind gerade die Diagonalelemente und somit

$$\lambda_n = n^2$$

und die Eigenvektoren ausgedrückt mit den karthesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_i$:

$$e_n = \alpha \cdot \hat{e}_n$$

also

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ .. \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ .. \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ .. \end{pmatrix}, \ldots$$

Aufgabe 22

a)

Für die zeitunabhängige Schrödingergleichung im Impulsraum

$$\hat{H}\Phi(p) = E\Phi(p)$$

brauchen wir zunächst den Hamilton-Opertor im Impulsraum. Der Impulsoperator im Impulsraum bleibt logischerweise p und der Ortsoperator im Impulsraum wird zu

$$\hat{x} = -\frac{\partial}{\partial p}\frac{\hbar}{i}$$

Somit können wir schreiben

$$(\frac{p^2}{2m} + \frac{\partial}{\partial p}\frac{\hbar F}{i})\Phi(p) = E\Phi(p)$$

Wir lösen auf und wagen einen Seperationsansatz:

$$\frac{\hbar F}{i}\frac{\partial\Phi(p)}{\partial p} = (E - \frac{p^2}{2m})\Phi(p)$$

$$\partial\Phi(p) = \int \partial p\ (E - \frac{p^2}{2m})\Phi(p)$$

Als Ansatz dient natürlich die Exponentialfunktion, die wir auf die Form bringen:

$$\Phi(p) = exp\left(-\frac{i}{\hbar F}(\frac{p^3}{6m} - pE) + c\right)$$

b)

Durch Fourier-Transformation bringen wir die Wellenfunktion vom Impuls- in den Ortsraum:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\ exp\left(-\frac{i}{\hbar F}(\frac{p^3}{6m} - pE) + ipx\right)$$

Wir schreiben in der Sinus & Cosinus Darstellung:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\ cos\left(-\frac{1}{\hbar F}(\frac{p^3}{6m} - pE) + px\right) + \underbrace{i\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\ sin\left(-\frac{1}{\hbar F}(\frac{p^3}{6m} - pE) + px\right)}_{=0}$$

Wir ziehen nun das Minus aus dem Cosinus und nutzen dessen Symmetrie aus um das Integral zu schreiben als

$$\Psi(x) = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty dp \; cos \left(\frac{1}{\hbar F} (\frac{p^3}{6m} - pE) + px \right)$$

Nun substituieren wir

$$a = \frac{p}{\sqrt[3]{2m\hbar F}}$$

$$b = a\sqrt[3]{2m\hbar F} (\frac{E}{\hbar F} - x)$$

$$dp = \sqrt[3]{2m\hbar F} da$$

$$\Psi(x) = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt[3]{2m\hbar F} \int\limits_0^\infty da \; cos \left(\frac{a^2}{3} + ba \right)$$

Wir verwenden nun

$$A_i(b) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty da \; cos \left(\frac{a^2}{3} + ba \right)$$

und schreiben

$$\Psi(x) = \sqrt{2\pi} \sqrt[3]{2m\hbar F} A_i(b)$$