Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik D im Sommersemester 2006

Übungsblatt 9

Name: _____ Tutorium: _____

Abgabe bis Dienstag, 27.6.06, 11:30 Punkte: _____

Aufgabe 23: *Drehimpuls* 5 Punkte

Die Vertauschungsrelationen für die quantenmechanischen Drehimpulsoperatoren J_1, J_2, J_3 lauten: $[J_i, J_k] = \mathrm{i}\hbar \sum_l \epsilon_{ikl} J_l$. Wir definieren $\vec{J}^{\,2} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, $J_\pm = J_1 \pm \mathrm{i} J_2$. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

$$[\vec{J}^{\,2}, J_k] = 0 \quad (1) \qquad J_\pm^\dagger = J_\mp \quad (2)$$

$$[J_3, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \quad (3) \qquad [J_+, J_-] = 2\hbar J_3 \quad (4)$$

$$\vec{J}^{\,2} - J_3^2 = \tfrac{1}{2}\left(J_+ J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+\right) \quad (5) \qquad J_- J_+ = \vec{J}^{\,2} - J_3^2 - \hbar J_3 \quad (6)$$

$$J_+ J_- = \vec{J}^{\,2} - J_3^2 + \hbar J_3 \quad (7)$$

a) Beweisen Sie die Gleichungen (3), (4) und (6). (2 Punkte)

b) Da $\vec{J}^{\,2}$ mit J_3 vertauscht, gibt es gemeinsame Eigenzustände $\psi_{j,m}$. Weiter kann $\vec{J}^{\,2}$ keine negativen Eigenwerte haben. Daher können wir schreiben:

$$\vec{J}^{\,2}\psi_{j,m} = \hbar^2 j(j+1)\,\psi_{j,m}\,, \qquad J_3\psi_{j,m} = m\hbar\,\psi_{j,m}$$

mit $j \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $j \geq 0$. Zeigen Sie: $J_\pm\psi_{j,m}$ ist entweder null oder wieder ein Eigenzustand zu $\vec{J}^{\,2}$ und J_3. Was sind die Eigenwerte? (1 Punkt)

c) Verwenden Sie Gleichung (5) um zu zeigen, daß es ein $m_{\max}$ und ein $m_{\min}$ gibt mit $J_+\psi_{j,m_{\max}} = 0$ und $J_-\psi_{j,m_{\min}} = 0$. Verwenden Sie dann die Gleichungen (6), (7) um zu zeigen, daß $m_{\max} = -m_{\min} = j$. Begründen Sie, daß j ganz- oder halbzahlig sein muß. (2 Punkte)

Aufgabe 24: *Drei-Schachtel-Paradoxon* 3 Punkte

Alice und Bob spielen ein quantenmechanisches Spiel. Hierzu werden drei Schachteln und ein Teilchen benötigt. Das Teilchen kann sich in jeder der drei Schachteln befinden. Der quantenmechanische Zustandsraum ist also dreidimensional und wird aufgespannt von orthonormierten Zuständen ψ_n, $n = 1, 2, 3$, wobei sich das Teilchen sicher in Schachtel Nr. n befindet, wenn das System im Zustand ψ_n ist. Alice präpariert das Quantensystem im Zustand $\psi = (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)/\sqrt{3}$. Das Spiel geht so: Alice übergibt die Schachteln 1 und 2 an Bob. Dieser darf nach seiner Wahl in eine der beiden Schachteln hineinsehen. Falls er dabei *nicht* die Kugel findet, hat er gewonnen. Allerdings gibt es eine Zusatzregel: Bob notiert sein Ergebnis auf einem Zettel, ohne es Alice zu verraten. Alice darf dann entscheiden, ob das Spiel zählt oder nicht.

In der klassischen Physik würde Bob mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 gewinnen. Mit Hilfe der Quantenmechanik kann Alice versuchen, Bobs Chancen zu reduzieren: Sie beschließt, das Spiel nur dann zu werten, wenn der Zustand des Systems nicht orthogonal zu $\phi = (\psi_1 + \psi_2 - \psi_3)/\sqrt{3}$ ist.

Analysieren Sie die möglichen Spielverläufe und berechnen Sie Bobs Gewinnchance.

Aufgabe 25: *Krummlinige Koordinaten* 5 Punkte

Wir betrachten den Übergang von kartesischen Koordinaten $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zu krummlinigen Koordinaten $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Zunächst definieren wir drei Vektorfelder $\vec{b}_{y_1}(\vec{y})$, $\vec{b}_{y_2}(\vec{y})$, $\vec{b}_{y_3}(\vec{y})$, die an jedem Punkt $\vec{y}$ in die Richtungen der krummlinigen Koordinaten y_1, y_2, y_3 zeigen sollen:

$$\vec{b}_{y_i}(\vec{y}) = \frac{\partial \vec{x}(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_i} .$$

Der Einfachheit halber wollen wir nur solche krummlinigen Koordinaten zulassen, für die die Vektoren $\vec{b}_{y_i}(\vec{y})$ an jedem Punkt $\vec{y}$ orthogonal sind. Somit bilden die $\vec{b}_{y_i}$ für festes $\vec{y}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$. Weiter setzen wir $n_{y_i}(\vec{y}) := |\vec{b}_{y_i}(\vec{y})|$ und $\vec{e}_{y_i} := \vec{b}_{y_i}/n_{y_i}$. O.B.d.A. bilden $\vec{e}_{y_1}$, $\vec{e}_{y_2}$, $\vec{e}_{y_3}$ ein rechtshändiges Orthonormalsystem, so daß $\vec{e}_{y_1} \times \vec{e}_{y_2} = \vec{e}_{y_3}$.
[Zur Veranschaulichung können Sie z.B. an Zylinderkoordinaten denken: $y_1 = \rho$, $y_2 = \phi$, $y_3 = z$.]

a) Zeigen Sie: $\vec{e}_{y_i} = n_{y_i} \nabla y_i$.
(1 Punkt)

Gegeben sei nun ein beliebiges Vektorfeld $\vec{V}(\vec{x})$. Dieses ordnet jedem Punkt des Raumes einen Vektor zu. Wir wollen den einem Punkt zugeordneten Vektor nun in der Basis $\vec{e}_i$ entwicklen, die zum selben Raumpunkt gehört:

$$\vec{V}(\vec{x}) = \sum_k V_{y_k}(\vec{y})\, \vec{e}_{y_k}(\vec{y}) .$$

b) Zeigen Sie, dass die Divergenz $\nabla \cdot \vec{V}(\vec{x})$ eines Vektorfeldes wie folgt durch die krummlinigen Komponenten $V_{y_i}(\vec{y})$ und Ableitungen nach den y^i ausgedrückt werden kann:

$$\nabla \cdot \vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{n_{y_1} n_{y_2} n_{y_3}} \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{n_{y_1} n_{y_2} n_{y_3}}{n_{y_k}} V_{y_k}(\vec{y}) \right) .$$

Verwenden Sie hierfür die in Teilaufgabe a) angegebene Formel sowie die Rechenregel für die Divergenz eines Vektorproduktes.
(2 Punkte)

c) Zeigen Sie, daß für skalare Felder $\Phi(\vec{x})$ gilt:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{n_{y_1} n_{y_2} n_{y_3}} \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{n_{y_1} n_{y_2} n_{y_3}}{n_{y_k}^2} \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi \right) .$$

(1 Punkt)

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der in den vorigen Teilaufgaben angegebenen Informationen die Darstellung des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten.
(1 Punkt)