Theoretische Physik D - Übungsblatt 8

Philipp Jung

18.06.2006

Aufgabe 23

a)

(3) Beweisen wir durch Einsetzen in die gegebenen Vertauschungsrelationen:

$$[J_3, J_\pm] = [J_3, J_1 \pm iJ_2] = \underbrace{[J_3, J_1]}_{=i\hbar J_2} \pm i \underbrace{[J_3, J_2]}_{=-i\hbar J_1} = \hbar\,(iJ_2 \pm J_1) = \hbar J_\pm$$

(4) setzen wir ein, trennen die Kommutatoren und setzen dann wieder in die bekannte Relation ein:

$$[J_+, J_-] = [J_1 + iJ_2, J_1 - iJ_2] = \underbrace{[J_1, J_1]}_{=0} - i \underbrace{[J_1, J_2]}_{=i\hbar J_3} + i \underbrace{[J_2, J_1]}_{=-i\hbar J_3} + \underbrace{[J_2, J_2]}_{=0} = 2\hbar J_3$$

(6) multiplizieren wir einfach aus, und bedenken dabei dass sich (da wir keine Kommutativität zwischen J_1 und J_2 haben) die zwei "gemischten Terme" nicht wie gewohnt wegheben!

$$J_- J_+ = (J_1 - iJ_2)(J_1 + iJ_2) = J_1^2 + J_2^2 + i \underbrace{(J_1 J_2 - J_2 J_1)}_{=[J_1, J_2]=i\hbar J_3} = \underbrace{J_1^2 + J_2^2}_{=\vec{J}^2 - J_3^2} - \hbar J_3 = \vec{J}^2 - J_3^2 - \hbar J_3$$

Aufgabe 24

Wir nehmen hier an, dass sich die Wellenfunktion beim Aufdecken der Schachtel (=Messung!) verändert. Es passiert eine "Reduktion Der Wellenfunktion" (abgekürzt RDW), je nach dem was Bob findet (=misst). Es ergeben sich so 4 mögliche neue Wellenfunktionen:

Z1 Bob öffnet die Schachtel 1 und findest das Teilchen. Die Wellenfunktion wird zu $\Psi = \psi_1$

Z2 Bob öffnet die Schachtel 2 und findest das Teilchen. Die Wellenfunktion wird zu $\Psi = \psi_2$

Z3 Bob öffnet die Schachtel 1 und findest nichts. Die Wellenfunktion wird zu $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 + \psi_3)$

Z4 Bob öffnet die Schachtel 2 und findest nichts. Die Wellenfunktion wird zu $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_3)$

Überprüfen wir nun diese Zustände auf Orthogonalität so stellen wir fest, dass für Z1 und Z2 das Skalarprodukt zwischen Wellenfunktion und Φ nicht verschwindet:

$$Z1 : <\psi_1|\frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3)> = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underbrace{<\psi_1|\psi_1>}_{=1} + \underbrace{<\psi_1|\psi_2>}_{=0} - \underbrace{<\psi_1|\psi_3>}_{=0}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$$

$$Z2 : <\psi_2|\frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3)> = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underbrace{<\psi_2|\psi_1>}_{=0} + \underbrace{<\psi_2|\psi_2>}_{=1} - \underbrace{<\psi_2|\psi_3>}_{=0}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$$

Somit sind diese Zustände NICHT orthogonal, und werden gewertet. In diesen beiden Fällen gewinnt also Alice. In den anderen beiden Fällen verschwindet das Skalarprodukt:

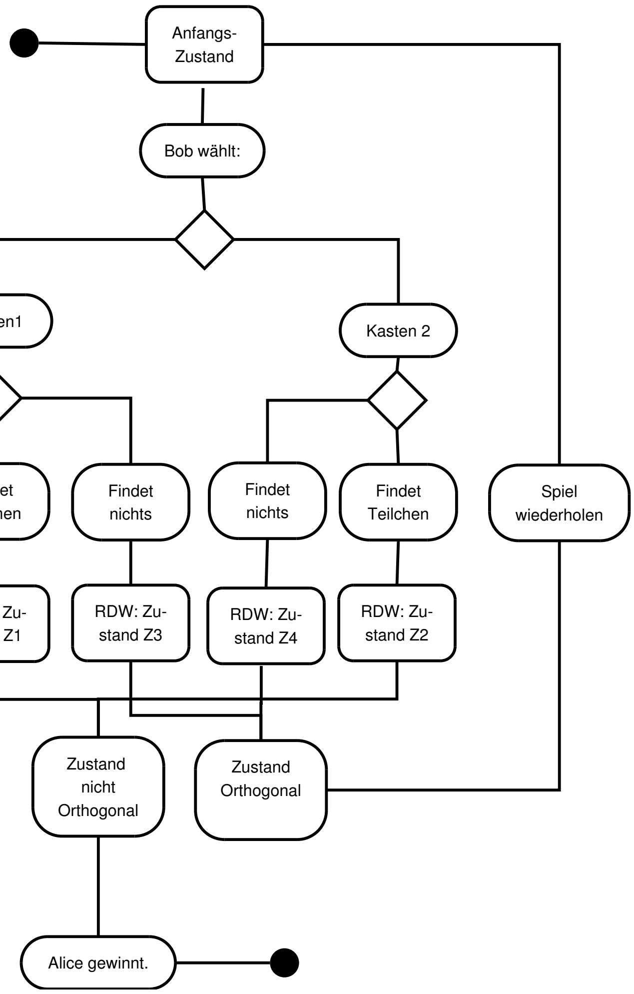
$$Z3 : < \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 + \psi_3)|\frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3) >$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(\underbrace{< \psi_2|\psi_1 >}_{=0} + \underbrace{< \psi_3|\psi_1 >}_{=0} + \underbrace{< \psi_2|\psi_2 >}_{=1} + \underbrace{< \psi_3|\psi_2 >}_{=0} - \underbrace{< \psi_2|\psi_3 >}_{=0} - \underbrace{< \psi_3|\psi_3 >}_{=1}) = 0$$

$$Z4 : < \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_3)|\frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3) >$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(\underbrace{< \psi_1|\psi_1 >}_{=1} + \underbrace{< \psi_3|\psi_1 >}_{=0} + \underbrace{< \psi_1|\psi_2 >}_{=0} + \underbrace{< \psi_3|\psi_2 >}_{=0} - \underbrace{< \psi_1|\psi_3 >}_{=0} - \underbrace{< \psi_3|\psi_3 >}_{=1}) = 0$$

Diese Zustände sind somit orthogonal und werden nicht gewertet.
Zusammenfassend werden also nur die Zustände gewertet, bei denen Alice gewinnt. Der Spielverlauf sieht dann so aus:



Aufgabe 25

a)

Hierfür verwenden wir die Definition des Gradienten in allgemeinen, orthogonalen Koordinaten (Bronstein):

$$grad(U) = \sum_j \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_j}|} \frac{\partial U}{\partial y_j} \vec{e}_{yj} = \sum_j \frac{1}{n_{yj}} \frac{\partial U}{\partial y_j} \vec{e}_{yj}$$

Somit gilt für den Gradienten ∇y_i:

$$\nabla y_i = \sum_j \frac{1}{n_{yj}} \frac{\partial y_i}{\partial y_j} \vec{e}_{yj} = \frac{1}{n_{yi}} \vec{e}_{yi}$$

und

$$n_{yi} \cdot \nabla y_i = n_{yi} \cdot \frac{1}{n_{yi}} \vec{e}_{yi} = \vec{e}_{yi}$$

b)

Hier berechnen wir die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{V}$. Da V als Summe gegeben ist betrachten wir zunächst nur das erste Summenglied:

$$\nabla \vec{V} = \underbrace{\nabla(V_{y1}\vec{e}_{y1})}_{dieses} + \nabla(V_{y2}\vec{e}_{y2}) + \nabla(V_{y3}\vec{e}_{y3})$$

Zunächst verwenden wir die Vorausgesetzte Orthogonalität:

$$div(V_{y1}(\vec{e}_{y2} \times \vec{e}_{y3}))$$

dann unser Ergebnis aus a)

$$= div(\underbrace{V_{y1} n_{y2} n_{y3}}_{f} \underbrace{(grad(y_2) \times grad(y_3))}_{\vec{v}})$$

nun wie in der Aufgabenstellung angedeutet, die Formel für die Divergenz eines Skalarproduktes: $div(f \cdot \vec{v}) = f \cdot div(\vec{v}) + grad(f) \cdot \vec{v}$. Hier bei fällt der erste Term komplett weg, da die Divergenz eines Kreuzproduktes gleich der Rotation der Summe der Rotation der beiden Terme ist, und diese jeweils wieder Gradienten sind! (Wir hätten also etwas wie $rot(grad(y_2)) + rot(grad(y_3))$ was natürlich verschwindet! Es bleibt also nur der hintere Term:

$$= grad(V_{y1} n_{y2} n_{y3}) \cdot (grad(y_2) \times grad(y_3))$$

Wir formen nun den hinteren Teil wieder zurück um:

$$= grad(V_{y1} n_{y2} n_{y3}) \cdot \frac{\vec{e}_{y1}}{n_{y2} n_{y3}}$$

...und schreiben den Gradienten aus:

$$\frac{\vec{e}_{y1}}{n_{y2} n_{y3}} \cdot \sum_j \frac{1}{n_y j} \frac{\partial}{\partial y_j} (V_{y1} n_{y2} n_{y3}) \cdot \vec{e}_{yj}$$

Diese Summe liefert nur dann einen Beitrag, wenn $\vec{e}_{y1} = \vec{e}_{yj}$, da sonst das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren 0 ergibt. Es bleibt also:

$$\frac{1}{n_{y1} n_{y2} n_{y3}} \frac{\partial}{\partial y_1} (V_{y1} n_{y2} n_{y3})$$

Analog finden wir für die restlichen 2 Summanden unserer Ausgangssumme $\frac{1}{n_{y1}n_{y2}n_{y3}}\frac{\partial}{\partial y_2}(V_{y2}n_{y1}n_{y3})$ und $\frac{1}{n_{y1}n_{y2}n_{y3}}\frac{\partial}{\partial y_3}(V_{y3}n_{y1}n_{y2})$. Wir könne das ganze Ergebnis dann also so zusammenfassen:

$$\nabla\vec{V} = \frac{1}{n_{y1}n_{y2}n_{y3}}\sum_j \frac{\partial}{\partial y_j}(V_{yj}\frac{n_{y1}n_{y2}n_{y3}}{n_{yj}})$$

c)

Wir wissen, dass $\Delta = \nabla\nabla$ und betrachten setzen $\nabla\Phi$ einfach für $\vec{V}$ aus Teilaufgabe b). Wir vergleichen zunächst die für $\vec{V}$ angegebene Summe mit der Definition des Gradienten aus a) und finden den sehr einfachen Zusammenhang:

$$\sum_k V_{yk}\vec{e}_{yk} = \sum_k \frac{1}{n_{yk}}\frac{\partial\Phi}{\partial y_k}\vec{e}_{yk}$$

$$V_{yk} = \frac{1}{n_{yk}}\frac{\partial\Phi}{\partial y_k}$$

Das setzen wir in das Ergebnis aus c) ein:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{n_{y1}n_{y2}n_{y3}}\sum_j \frac{\partial}{\partial y_j}(\frac{\partial\Phi}{\partial y_j}\frac{n_{y1}n_{y2}n_{y3}}{n_{yj}^2})$$

d)

Unser $\vec{r}$ in Kugelkoordinaten lautet:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cdot sin(\theta)\cdot cos(\phi) \\ r\cdot sin(\theta)\cdot sin(\phi) \\ r\cdot cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Unsere y_k sind also r, θ und ϕ Demnach sind unsere n_{yk} gleich:

$$n_r = \left|\frac{d\vec{r}}{dr}\right| = 1$$

$$n_\theta = \left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right| = r$$

$$n_\phi = \left|\frac{d\vec{r}}{d\phi}\right| = r\cdot sin(\phi)$$

All das setzen wir nun in die Gleichung aus c) ein und erhalten:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin(\theta)\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}$$