Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik D im Sommersemester 2006

Übungsblatt 10

Name: _____ Tutorium: _____

Abgabe bis Dienstag, 4.7.06, 11:30 Punkte: _____

Aufgabe 26: *Satz von Ehrenfest* 6 Punkte

a) Zeigen Sie im Rahmen der Schrödingerschen Wellenmechanik das Ehrenfestsche Theorem für ein Teilchen in einer Dimension, das sich in einem Potential $V(x)$ bewegt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle = \langle p\rangle/m\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle = -\langle V'(x)\rangle\,.$$

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie weiter, daß der Ortserwartungswert $\langle x\rangle$ die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\langle x\rangle = -V'\left(\langle x\rangle\right)$$

erfüllt, falls $V(x)$ ein Polynom höchstens zweiten Grades in x ist.
(2 Punkte)

c) Angenommen, $V(x)$ ist *kein* Polynom höchstens zweiten Grades in x. Wie geartet muß eine Wellenfunktion sein, damit die Newtonsche Bewegungsgleichung zumindest näherungsweise gilt? (Qualitative Antwort genügt)
(1 Punkt)

Aufgabe 27: *Kugelflächenfunktionen* 6 Punkte

Die assoziierten Legendrepolynome sind definiert als:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l\, l!}\,(1-x^2)^{m/2}\,\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l\,,$$

mit $x \in [-1,1]$, $l \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \le l$ und erfüllen die Differentialgleichung

$$(1-x)^2\,P_l^{m\prime\prime} - 2x\,P_l^{m\prime} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_l^m = 0\,.$$

Die Kugelflächenfunktionen sind gegeben durch

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\,.$$

a) Zeigen Sie, daß die Kugelflächenfunktionen als Funktionen auf der Kugel stetig sind.

b) Der Bahndrehimpulsoperator lautet in Kugelkoordinaten:

$$L_x = \mathrm{i}\hbar \left[\sin\phi \, \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right]$$
$$L_y = \mathrm{i}\hbar \left[-\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right]$$
$$L_z = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \, .$$

Berechnen Sie $\vec{L}^2$ und zeigen Sie, daß $\Delta = -\vec{L}^2/(r^2\hbar^2) + (1/r^2)\partial_r(r^2\partial_r)$, wobei Δ der Laplaceoperator in Kugelkoordinaten ist.

c) Zeigen Sie, daß die Kugelflächenfunktionen Y_l^m gemeinsame Eigenfunktionen zu den Operatoren L_z und $\vec{L}^2$ sind und bestimmen Sie die Eigenwerte.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 28: *Teilchen auf dem Kreis*

Ohne Bewertung

Wir betrachten ein Teilchen der Masse M, das sich auf einer Kreislinie in der xy-Ebene frei bewegen kann. Die Wellenfunktion hängt dann nur vom Azimutwinkel ϕ ab, und es muß gelten: $\psi(0) = \psi(2\pi)$. Wir bezeichnen die Menge der 2π-periodischen stetig differenzierbaren Funktionen mit Π.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator an und finden Sie die zugehörigen Eigenwerte und -funktionen.

b) Berechnen Sie den Kommutator $[L_3, \phi]$, wobei L_3 der Drehimpuls in z-Richtung ist. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie den Erwartungswert bezüglich eines Energieeigenzustandes bilden. Verwenden Sie hierfür die Hermitezität und die Eigenwerte von L_3 und verzichten Sie darauf, Integrale explizit hinzuschreiben.
Hinweis: Sie sollten einen Widerspruch finden.

c) Um den Widerspruch aufzulösen, müssen wir die maximalen Definitionsbereiche $D(O)$

$$O : D(O) \to \Pi \quad \text{mit } D(O) \subset \Pi$$

der Operatoren $L_3\phi$ und ϕL_3 betrachten. Bestimmen Sie also $D(L_3\phi)$ und $D(\phi L_3)$.

d) Berechnen Sie nochmals den Erwartungswert $\langle\psi|[L_3, \phi]\,\psi\rangle$, wobei ψ ein normierter Energieeigenzustand ist. Setzen Sie diesmal aber explizit die Wellenfunktion ein und berechnen Sie den Erwartungswert als Integral. Verwenden Sie keine abstrakten Rechenregeln für hermitesche Operatoren.