Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik D im Sommersemester 2006

Übungsblatt 13

Name: _____ Tutorium: _____

Abgabe bis Dienstag, 25.7.06, 11:30 Punkte: _____

Aufgabe 35: *Kohärente Zustände eines harmonischen Oszillators* 12 Punkte

Formeln für die Auf- und Absteigeoperatoren:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger) \qquad p = -\mathrm{i}\sqrt{m\hbar\omega/2}\,(a - a^\dagger)$$

$$[a, a^\dagger] = 1 \qquad H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$N = a^\dagger a \qquad N\psi_n = n\psi_n$$

$$a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1} \qquad a^\dagger\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$$

a) Zeigen Sie, daß Eigenzustände des Absteigeoperators a minimale Orts-Impuls-Unschärfe haben. Diese Zustände nennt man *kohärent*. Verwenden Sie zur Berechnung der Orts- und Impulsunschärfe die Auf- und Absteigeoperatoren.
(4 Punkte)

b) Bestimmen die normierten kohärenten Zustände explizit in der Besetzungszahl-Darstellung, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten c_n in

$$\phi_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\psi_n\,, \qquad \text{mit } a\phi_\alpha = \alpha\phi_\alpha\,, \quad ||\phi_\alpha|| = 1\,.$$

(3 Punkte)

c) Schreiben Sie die normierten kohärenten Zustände ϕ_α zum a-Eigenwert α in der Form

$$\phi_\alpha = f(\alpha, a^\dagger)\psi_0$$

(2 Punkte)

d) $\chi(x) := \psi_0(x + \lambda)$ sei der um λ verschobene Grundzustand. Mit Hilfe einer Taylorentwicklung um x kann man auch schreiben: $\chi(x) = \exp(\mathrm{i}\lambda\, p/\hbar)\, \psi_0(x)$, wobei $p = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$ der Impulsoperator ist.
Zeigen Sie, daß χ ein kohärenter Zustand ist. Durch welche Erwartungswerte von Ort und Impuls ist χ charakterisiert?
Hinweis: Sie können die Campbell-Baker-Hausdorff-Formel benutzen,

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]}\,, \text{ falls } [A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0\,.$$

(Ohne Bewertung; Sie können bis zu 3 Bonuspunkte erhalten)

e) Ein harmonischer Oszillator befinde sich zur Zeit $t = 0$ in einem kohärenten Zustand mit a-Eigenwert α_0.

Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Zustands. Zeigen Sie insbesondere, daß der Zustand kohärent bleibt.
(1 Punkt)

f) Angenommen, wir haben einen Detektor, der ein Signal ausgibt falls die Energie des Oszillators kleiner ist als $2\hbar\omega$. Mit diesem führen wir zur Zeit $t_1 > 0$ eine Messung an dem in der vorigen Teilaufgabe beschriebenen System aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schlägt der Detektor an? Bestimmen Sie den Zustand des Systems für Zeiten $t > t_1$ in Abhängigkeit des Messergebnisses zur Zeit t_1.
(2 Punkte)

[Kohärente Zustände nennt man auch *Glauber-Zustände*. Roy Glauber erhielt unter anderem dafür 2005 den Nobelpreis.]

Informationen zur Klausur

- Die Klausur findet am **Donnerstag, 27.07.2006 um 16:15 Uhr im Gerthsen-Hörsaal** statt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt zweieinhalb Stunden (150 Minuten).
- Sie dürfen zwei handbeschriebene A4-Seiten (dies entspricht *einem* beidseitig beschriebenen Blatt) mit in die Klausur nehmen.
- Fremdsprachige Studenten können ein Wörterbuch mitnehmen.
- Die Rückgabe und Besprechung der Klausur erfolgt in der Vorlesung am Freitag, 28.07.2006 um 11:30. Dort erhalten Sie im Erfolgsfalle auch Ihren Übungsschein.
- Einen Übungsschein erhält, wer in den Übungen und in der Klausur jeweils 50% der möglichen Punkte erzielt.
- Auf dem Deckblatt der Klausur sollten Sie Namen und Matrikelnummer (also: Studentenausweis nicht vergessen!) deutlich lesbar vermerken, da diese Angaben für den Schein verwendet werden.
- Bei Bedarf wird eine Nachklausur angeboten, deren Termin noch nicht feststeht.