1. Übung zu Theorie D: Quantentheorie
Universität Karlsruhe SS 2007

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Anna Posazhennikova, PD Dr. Wolfgang Wenzel

www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Präsentation: Mittwoch, 25.04.2007 in den Übungen

Aufgabe 1: Gauß-Integral

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ und Re $\alpha > 0$.

Anleitung: Betrachten Sie das Quadrat des obigen Integrals und benutzen Sie Polarkoordinaten.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{2\alpha}\right),$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und Re $\alpha > 0$.

2 Punkte

Aufgabe 2: Fresnel-Formel

Beweisen Sie durch Konturintegration, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(i\frac{\alpha}{2}x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha|}} \begin{cases} \sqrt{i} & \alpha > 0, \\ 1/\sqrt{i} & \alpha < 0. \end{cases}$$

1 Punkte

Aufgabe 3: Entwicklung eines Gauß'schen Wellenpakets

Betrachten Sie ein eindimensionales Gauß'sches Wellenpaket

$$\Psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} g(k) e^{-ikx}$$

mit $g(k) = Const \exp(-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2)$, wobei $g(k)$ eine reelle Funktion ist.

(a) Was ist die normierte Wellenfunktion $\Psi(x,0)$?

(b) Wie entwickelt sich $\Psi(x,t)$ mit der Zeit wenn das Potenzial $V(x,t) = 0$ ist? Bestimmen Sie $\Psi(x,t)$. Zur Vereinfachung dürfen Sie die Vorfaktoren vor den Exponentialausdrücken ignorieren.

(c) Was ist $|\Psi(x,t)|^2$? Wie wächst $\Delta x(t)$? Was passiert bei $t < 0$?

(d) Was ist $(\Delta k)^2$?

4 Punkte