Aufgabe 1: Eigenschaften der Dirac'schen Delta-Funktion

(a) Beweisen Sie die folgende Darstellung der δ -Funktion

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}.$$

1 Punkt

(b) Zeigen Sie, dass $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$, wobei x_i nullstellen von $f(x)$ sind.

1 Punkt

(c) Zeigen Sie, dass $d\theta(x)/dx = \delta(x)$ ist, wobei $\theta(x) = 1$ wenn $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ wenn $x < 0$.

1 Punkt

Aufgabe 2: Dreidimensionaler Potenzialtopf mit unendlichen hohen Wänden

Betrachten Sie den Potenzialtopf $V(x, y, z) = V_x(x) + V_y(y) + V_z(z)$, wobei

$$V_x(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < a, \\ \infty & , \text{sonst,} \end{cases} \quad V_y(y) = \begin{cases} 0 & , 0 < y < b, \\ \infty & , \text{sonst,} \end{cases} \quad V_z(z) = \begin{cases} 0 & , 0 < z < c, \\ \infty & , \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die stationären Lösungen der Schrödinger Gleichung sowie die Energieniveaus. Verwenden Sie dazu einen Produktansatz $\varphi_{lmn}(x, y, z) = \varphi_l^{(x)}(x)\varphi_m^{(y)}(y)\varphi_n^{(z)}(z)$.

2 Punkte

(b) Was passiert für $b, c \ll a$? Zeigen Sie, dass die niedrigsten Energieniveaus E_{lmn} in diesem Fall alle $m = n = 1$ haben. Was bedeutet das für die Wellenfunktionen der niedrigsten Energieniveaus? Diskutieren Sie, wann sich das System effektiv 1-dimensional verhält. Berechnen Sie E_{121} und E_{112} .

1 Punkt

Aufgabe 3: δ -Funktionspotenzialtopf und Barriere

(a) Betrachten Sie einen Potenzialtopf $V(x) = -c\delta(x)$, $c > 0$.

Zeigen Sie, dass es einen gebunden Zustand gibt und bestimmen Sie die normierte Wellenfunktion und die Energie.

Hinweis: verwenden Sie den Ansatz $\Psi_{I,II}(x) = A_{I,II} \exp(-\lambda x) + B_{I,II} \exp(\lambda x)$ mit geeigneten Anschlußbedingungen bei $x = 0$ (siehe Vorlesung).

2 Punkte

(b) Betrachten Sie eine Potenzialbarriere $V(x) = c\delta(x)$.

Was ist T und R als Funktion der Energie des einlaufenden Teilchen.

2 Punkte