Lösungsvorschlag Theoretische Physik D Übungsblatt 2

Prof. Dr. G. Schön und Dr. A. Posazhennikova

Sommersemester 2007

Aufgabe 1 **3 Punkte**

(a) **1 Punkt**

(a) Eigenschaften von δ-Funktion

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x = 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

und

$$\int_{-a}^{a} dx \delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-a}^{a} dx \delta_\epsilon(x) = 1 \tag{2}$$

für beliebiges $a > 0$.

Also, für $x \neq 0$ gilt:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2} = 0, \tag{3}$$

für $x = 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2} = \infty, \tag{4}$$

und

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-a}^{a} dx \delta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} dx \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-a/\epsilon}^{a/\epsilon} dt \frac{1}{1+t^2} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{a}{\epsilon}\right) = 1 \tag{5}$$

mit $t = x/\epsilon$, $\arctan(-x) = -\arctan(x), \arctan(\infty) = \pi/2$.

(b) **1 Punkt**

Z.B. kann mann das so beweisen: weil $\delta(f(x))$ bei $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 0$ ... divergiert, verwenden wir die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um die Nullstelle von $f(x)$: $x = x_i$, $i = 1, 2, ..$ (wir erhalten nur die ersten *nicht-verschwindenden* Terme):

$$\delta(f(x)) = \sum_i \delta(f(x_i)+(x-x_i)f'(x_i)) = \sum_i \delta(0+(x-x_i)f'(x_i)) = \sum_i \delta((x-x_i)f'(x_i)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i) \tag{6}$$

hier haben wir auch verwendet, dass $\delta(cx) = \delta(x)/|c|$. Betrachten wir das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(cx) d(x) = [z \equiv cx] = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) d(z) = \frac{1}{|c|}. \tag{7}$$

(c) $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$

Eine Möglichkeit:
gemäß der Definition der δ-Funktion müßte gelten:

$$\int_{-a}^{a} dx f(x) \frac{d}{dx}\theta(x) = \int_{-a}^{a} dx f(x)\delta(x) = f(0). \tag{8}$$

Die linke Seite ergibt mit partieller Integration:

$$[\theta(a)f(a) - \theta(-a)f(-a)] - \int_{-a}^{a} dx \theta(x) f'(x) =$$
$$f(a) - \int_{0}^{a} dt f'(t) = f(a) - [f(a) - f(0)] = f(0). \tag{9}$$

Aufgabe 2 $\boxed{\textbf{3 Punkte}}$

a.)

Schrödinger Gleichung lautet

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V_x(x) + V_y(y) + V_z(x)\right]\varphi(x,y,z) = E\varphi(x,y,z) \tag{10}$$

H ist eine Summe unabhängige Terme! Wir verwenden einen Produktansatz $\varphi_{lmn}(x,y,z) = \varphi_l^{(x)}(x)\varphi_m^{(y)}(y)\varphi_n^{(z)}(z)$.
Wir bekommen drei unabhängige Bewegungsgleichungen:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_x(x)\right]\varphi_l^{(x)}(x) = E_l \varphi_l^{(x)}(x), \tag{11}$$
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + V_y(y)\right]\varphi_m^{(y)}(y) = E_m \varphi_m^{(y)}(y), \tag{12}$$
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_z(z)\right]\varphi_n^{(z)}(z) = E_n \varphi_n^{(z)}(z), \tag{13}$$

Wir betrachten jeztz die Gleichung (9): die Lösung für $0 < x < a$ ist

$$\begin{aligned} \varphi^{(x)}(x) &= A_1 e^{i\lambda x} + A_2 e^{-i\lambda x} \\ &= \alpha \sin(\lambda x) + \beta \cos(\lambda x) \end{aligned} \tag{14}$$

wobei $\lambda = \sqrt{2mE}/\hbar$.
Aber $\varphi^{(x)}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$
und $\varphi^{(x)}(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda a = \pi l$, wobei $l = 0, 1, 2...$
$\lambda = 0$: $\quad \alpha \sin(0x) = 0$ - nicht möglich, da $\int_0^a dx |\varphi^{(x)}(x)|^2 = 1$ ist.
$\lambda \neq 0$: $\quad 1 = \int_0^a dx |\alpha|^2 \sin^2(\pi n x/a) = |\alpha|^2 a/2 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\varphi_l^{(x)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi l x}{a}\right)}, \quad \boxed{E_l^{(x)} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi l}{a}\right)^2} \quad \text{wobei} \quad l = 1, 2...$$

Ähnlich:

$$\varphi_m^{(y)}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{\pi m x}{b}\right), \quad E_m^{(y)} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \quad \text{wobei} \quad m = 1, 2...$$

und

$$\varphi_n^{(z)}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right), \quad E_n^{(z)} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi n}{c}\right)^2, \quad \text{wobei} \quad n = 1, 2... \quad \Rightarrow$$

$$E_{lmn} = E_l^{(x)} + E_m^{(y)} + E_n^{(z)} = \frac{\hbar^2}{2m}\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right).$$

2 Punkte

b.)

Für $b, c \ll a$ gilt

$E_{111} < E_{211} < E_{311} < E_{411} < ... < E_{121}, E_{112}...$

Also in großem Bereich von Energien bleibt das System in y und z Richtung im Grunzustand $\varphi_1^{(y)}(y)$ und $\varphi_1^{(z)}(z)$
$\Rightarrow$ effektive 1-dimensionale Verhalten für Energien kleiner als $E_{121}, E_{112} \approx \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{4\pi^2}{b^2}\right), \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{4\pi^2}{c^2}\right)$.

1 Punkt

Aufgabe 3 $\boxed{\text{4 Punkte}}$

a.)

Schrödinger Gleichung:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \qquad \Rightarrow \tag{15}$$

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - c\delta(x)\right)\Psi = E\Psi$$

d.h.

$$\begin{aligned}\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - c\delta(x)\right)\Psi &= E\Psi, \text{ für } x = 0 \\ \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi &= E\Psi, \text{ sonst}\end{aligned} \tag{16}$$

(1) Betrachten wir zunächt den Bereich $x \neq 0$. Wir haben

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = E\Psi$$

Die Lösung dieser Gleichung (Theo A) ist

$$\Psi(x) = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x}$$

wobei $\lambda = \sqrt{-2mE}/\hbar$, ($\lambda > 0$, weil $E < 0$ ist).
Wenn $x < 0$ ist, dann $\lim_{x\to-\infty} e^{-\lambda x} = \infty$; wenn $x > 0$ ist, dann $\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} = \infty$ $\Rightarrow$

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{\lambda x} & x < 0 \\ A_2 e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Die Funktion $\Psi(x)$ soll bei $x = 0$ stetig sein $\Rightarrow$ $\Psi(0+) = \Psi(0-)$ $\Rightarrow$ $A_1 = A_2 \equiv A$, und

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{\lambda x} & x \leq 0 \\ Ae^{-\lambda x} & x \geq 0. \end{cases} \tag{18}$$

(2) Wir betrachten nun den Bereich in der Nähe von $x = 0$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - c\delta(x)\Psi = E\Psi$$

Wir integrieren jetzt diese Gleichung von $-\epsilon$ bis ϵ, ($\epsilon \ll 1$)

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx c\delta(x)\Psi = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx E\Psi \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\bigg|_{\epsilon} - \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\bigg|_{-\epsilon}\right] - c\Psi(0) = E\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\Psi(x) \qquad \Rightarrow$$

Jetzt: $\epsilon \to 0$ und wir verwenden (16)

$$\begin{aligned}
\text{für}\, x < 0, \quad \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} &= -A\lambda e^{-\lambda x} \qquad \Rightarrow \\
\left.\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}\right|_0 &= -A\lambda \\
\text{für}\, x > 0, \quad \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} &= A\lambda e^{\lambda x} \qquad \Rightarrow \\
\left.\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}\right|_0 &= A\lambda,
\end{aligned}$$

und das Integral $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \Psi(x) \to 0$ für $\epsilon \to 0$.

Somit

$$\left[\left.\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}\right|_\epsilon - \left.\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}\right|_{-\epsilon}\right] = -2A\lambda = \frac{-2mc}{\hbar^2}\Psi(0),$$

aber $\Psi(0) = A$, und wir finden, dass $\lambda = mc/\hbar^2$, weil

$$-2A\lambda = \frac{-2mc}{\hbar^2}A.$$

D.h., dass es nur einziges (!) Energieniveau gibt:

$$\lambda = \frac{mc}{\hbar^2} = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{E = -\frac{mc^2}{2\hbar^2}}. \tag{19}$$

Die Normierungsbedingung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(x)|^2 &= 2|A|^2 \int_0^\infty e^{-2\lambda x} = \frac{|A|^2}{\lambda} = 1 \qquad \Rightarrow \\
A &= \sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{mc}}{\hbar} \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Psi(x) = \frac{\sqrt{mc}}{\hbar} e^{-\frac{mc|x|}{\hbar^2}}}. \tag{20}$$

2 Punkte

b.)

Als Teichen propagiere in die x-positiven Richtung, die Schrödinger Gleichung (13) lautet

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c\delta(x)\right)\Psi = E\Psi,$$

wobei E positiv ist.

Für $x < 0$ gibt es sowohl einlaufende als auch reflektierte Teilchen. Also,

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = E\Psi$$

Die Lösung ist

$$\Psi(x) = A_1 e^{i\lambda x} + A_2 e^{-i\lambda x}$$

wobei $\lambda = \sqrt{2mE}/\hbar$ ist. A_1 ist die Amplitude des einlaufenden Teilchens und kann wegen der Normierungsbedingung gleich 1 gesetzt werden. A_2 ist die Amplitude des reflektirten Teilchens. Das bedeutet, dass

$$\Psi(x) = e^{i\lambda x} + A_2 e^{-i\lambda x}.$$

Im Bereich $x > 0$ existieren nur transmittierte Teilchen, und somit

$$\Psi(x) = A_3 e^{i\lambda x}.$$

Per Definition

$$R = \left|\frac{A_2}{A_1}\right|^2; \quad \text{und} \quad T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2. \tag{21}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\Psi(0+) &= \Psi(0-),\\ \Psi'(0+) - \Psi'(0-) &= \frac{2mc}{\hbar^2}\Psi(0), \quad \text{(siehe 3(a))}. \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 + A_2 &= A_3,\\ \Psi'(0+) &= A_3 i\lambda \qquad (22)\\ \Psi'(0-) &= i\lambda - A_2 i\lambda \quad \Rightarrow \qquad (23)\end{aligned}$$

$$i\lambda(A_3 - 1 + A_2) = \frac{2mc}{\hbar^2}A_3 \quad \Rightarrow \tag{24}$$

$$\boxed{A_3 = \frac{i\lambda\hbar^2}{i\lambda\hbar^2 - mc}, \quad A_2 = \frac{mc}{i\lambda\hbar^2 - mc}} \tag{25}$$

Reflektionskoeffizient und Transmissionskoeffizient

$$\begin{aligned}R &= |A_2|^2 = \frac{m^2c^2}{m^2c^2 + \lambda^2\hbar^4} = \frac{m^2c^2/2\hbar^2}{m^2c^2/2\hbar^2 + \lambda^2\hbar^2/2} = \frac{-E_g}{-E_g + E},\\ T &= 1 - R = \frac{E}{-E_g + E} \qquad (26)\end{aligned}$$

wobei E_g die Energie eines gebundenten Zustands aus Aufgabe 3(a) ist. Mann merkt für $E \to \infty$, dass $R \to 0$ und $T \to 1$. Und für $E \to 0$, haben wir $R \to 1$ und $T \to 0$!

2 Punkte