Aufgabe 1: Potenzialtopf mit Wänden verschiedener Höhe

Betrachten Sie ein Teilchen im Potential $V(x)$

$$V(x) = \begin{cases} V_1, & x < 0, \\ 0, & 0 < x < a, \\ V_2, & x > a, \end{cases}$$

($V_1 > V_2 > 0$). Zeigen Sie, dass wenn $\sqrt{2ma^2V_2/\hbar^2} \geq \arctan \sqrt{(V_1 - V_2)/V_2}$ gilt, das Energiespektrum für dieses Teilchen diskrete Energieniveaus im Potenzialtopf besitzt.

2 Punkte

Aufgabe 2: Potenzialtöpfe und Barrieren

Betrachten Sie einen Potenzialtopf $V(x) = -c[\delta(x) + \delta(x - d)]$, $c > 0$.

(a) Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung und zeigen Sie, dass $E = -\hbar^2\rho^2/2m$, und

$$e^{-\rho d} = \pm \left(1 - \frac{\rho\hbar^2}{mc}\right).$$

Skizzieren Sie die graphische Lösung dieser Gleichung.

(b) Betrachten Sie eine Potentialbarriere $V(x) = c[\delta(x) + \delta(x - d)]$, $c > 0$.

Unter welchen Bedingungen für ρ ($\rho = \sqrt{2mE}/\hbar > 0$) ist der Reflexionskoeffizient dieser Barriere gleich null?

2 Punkte

Aufgabe 3: Hermite'sche Polynome

Betrachten Sie die Hermite'schen Polynome

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}. \quad (1)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion e^{-t^2+2zt} die erzeugende Funktion für Hermite'sche Polynome ist, d.h., dass

$$e^{-t^2+2zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(z) \quad (2)$$

gilt. [Hinweis: verwenden Sie die Taylor-Entwicklung für $e^{-(z-t)^2}$.]

1 Punkt

(b) Beweisen Sie die folgenden Rekursionsrelationen für H_n :

$$\frac{d}{dz} H_n(z) = 2n H_{n-1}(z) \quad (3)$$

und

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z). \quad (4)$$

[Hinweis: (3) und (4) kann man beweisen, indem man die Gl. (2) nach z bzw. nach t differenziert.]

Leiten Sie daraus die Differenzialgleichung für Hermite'sche Polynome

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + 2n \right] H_n(z) = 0 \quad (5)$$

her.

1 Punkt

(c) Beweisen Sie die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad (6)$$

[Hinweis: Multiplizieren Sie Gleichung (5) von links mit $H_m(z)e^{-z^2}$ und integrieren Sie über z . Ziehen Sie die entsprechende Gleichung mit m und n vertauscht ab. Partielle Integration in einer der beiden Gleichungen führt zum gewünschten Ergebnis.]

1 Punkt

(d) Zeigen Sie nun, dass einschliesslich $m = n$ die folgende Beziehung gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m} \quad (7)$$

[Hinweis: Für $m \neq n$ reduziert sich dies auf Gleichung (6). Verwenden Sie für $m = n$ die Methode der vollständigen Induktion, d.h. zeigen Sie die Beziehung zunächst für $n = 0$ und $n = 1$ und schließen Sie dann unter der Induktionsannahme, dass Gleichung (7) für $n - 1$ gilt auf ihre Gültigkeit für n . Sie erhalten das gewünschte Ergebnis am einfachsten über die Rekursionsformel (4) unter Verwendung der Orthogonalität (6). Sie erhalten dabei einen Ausdruck ze^{-z^2} , den Sie am besten durch $-\frac{1}{2} \frac{d}{dz} e^{-z^2}$ ausdrücken, partiell integrieren, und dann die Rekursionsformel (3) sowie nochmals (6) verwenden.]

1 Punkt