4. Übung zu Theorie D: Quantenmechanik I
Universität Karlsruhe SS 2007

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Anna Posazhennikova, PD Dr. Wolfgang Wenzel

www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Präsentation: Mittwoch, 16.05.2007 in den Übungen

Aufgabe 1: Dreieckspotenzial und Airy-Funktionen

Die Differentialgleichung $y'' - xy = 0$ wird gelöst durch die Airy-Funktionen $Ai(x)$ und $Bi(x)$ (siehe Abb.1: $Ai(x)$=ausgezogene Kurve, $Bi(x)$ =gestrichelte Kurve)

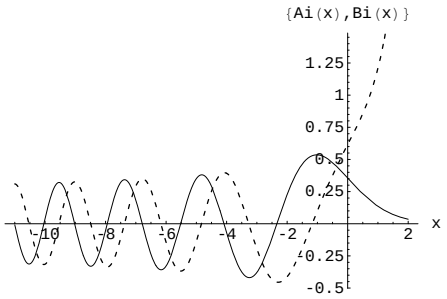

Abbildung 1: Airy Funktionen.

Die Funktion $Ai(x)$ hat Nullstellen, $Ai(x_n) = 0$, bei $x_0 = -2.33811$, $x_1 = -4.08795$, $x_2 = -5.52056$ uzw. (Die Funktion $Bi(x)$ divergiert bet $x \to \infty$ und interessiert uns hier nicht.)

Finden Sie mit dieser Information die Eigenfunktion (ohne Normierung) und Eigenwerte eines Teilchens im Dreieckspotenzial (Abb. 2)

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{für} \quad x < 0 \\ \lambda x, & \text{für} \quad x > 0. \end{cases}$$

(Hinweis: Führen Sie die Variable $\xi = x - E/\lambda$ ein, und schreiben Sie die Schrödinger-Gleichung im dimensionloser Form.)

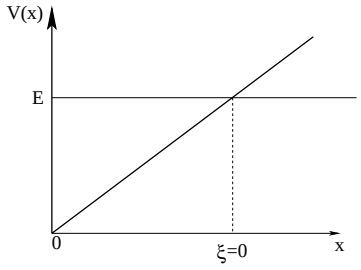

Abbildung 2: Das Dreieckspotenzial.

Schreiben Sie die Orthogonalitätsrelation der Eigenfunktionen ausgedrückt durch Airy-Funktionen auf (ohne Normierung). **2 Punkte**

Aufgabe 2: Vollständigkeit der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

Beweisen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(x') = \delta(x - x'),$$

wobei die φ_n die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind.

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Hermite'schen Polynome $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$, und drücken Sie e^{-z^2} durch eine Fourierdarstellung aus (siehe z.B. Aufgabe 1 b, Übungsblatt 1).

2 Punkte

Aufgabe 3: Operatoren und Kommutatoralgebra

(a) Prüfen Sie, ob die folgenden Operatoren hermitisch sind:
(i) $A = a \in \mathbb{C}$ (Multiplikation mit einer komplexen Zahl);
(ii) $A = \frac{\partial}{\partial x}$;
(iii) $P = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$;
(iv) Hamiltonoperator $H = \frac{P^2}{2m} + V(x)$;
(v) Matrix M_1

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

(vi) Matrix M_2

$$M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$,

(b) Zeigen Sie, dass $[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$, wenn $[[A, B], A] = 0$ gilt (n ist ganzzahlig und positiv). Berechnen Sie $[P, x^n]$.

2 Punkte