Lösungsvorschlag Theoretische Physik D Übungsblatt 4

Prof. Dr. G. Schön und Dr. A. Posazhennikova

Sommersemester 2007

Aufgabe 1 **2 Punkte**

Die Schrödinger-Gleichung lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + (\lambda x - E)\Psi = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2m\lambda x}{\hbar^2}\right)\Psi = 0 \tag{2}$$

mit Randbedingungen

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi(\infty) \to 0. \tag{3}$$

Wir führen nun eine neue Variable ξ' ein: $\xi' = x - E/\lambda \quad \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial \xi'^2} - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\xi'\Psi = 0, \tag{4}$$

und machen alles dimensionlos:

$$\xi = \xi' a^{1/3}, \quad a = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} - \xi\Psi = 0. \tag{5}$$

Die normierbare Lösung dieser Gleichung ist (N ist ein Normierungskoeffizient)

$$\Psi(x) = NAi(xa^{1/3} - \frac{E}{\lambda}a^{1/3}) \tag{6}$$

und R.B.

$$\Psi\left(-\frac{E}{\lambda}\left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^{1/3}\right) = 0, \tag{7}$$

$$\Psi(\infty) \to 0. \tag{8}$$

(7) $\quad \Rightarrow$

$$E_n = \left(\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m}\right)^{1/3} |x_n|, \tag{9}$$

wobei x_n die Nullstellen von $Ai(x)$ sind $\quad \Rightarrow$

$$\Psi_n(x) = NAi(a^{1/3}x + x_n). \tag{10}$$

Die ersten drei Eigenfunktionen für $n = 0, 1, 2$- siehe Abbbildung 1.
Orthogonalitätsbedingung ist

$$N^2 \int_0^\infty dx Ai(a^{1/3}x + x_n) Ai(a^{1/3}x + x_m) = \delta_{nm} \tag{11}$$

oder mit $y = a^{1/3}x \quad \Rightarrow$

$$\int_0^\infty dy Ai(y + x_n) Ai(y + x_m) \sim \delta_{nm}. \tag{12}$$

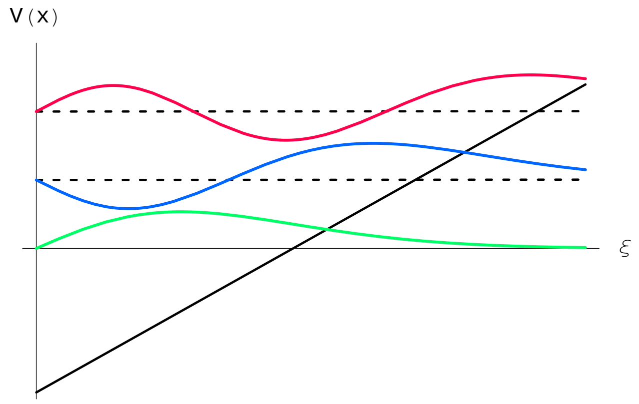

Abbildung 1: Graph der Wellenfunktion im Dreieckspotential für $n = 0$ (grune Kurve), $n = 1$ (blaue Kurve) und $n = 2$ (rote Kurve).

Aufgabe 2 $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Zu beweisen ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(x') = \delta(x - x') \tag{13}$$

wobei

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{\beta}{2^n n!}}\pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{\beta^2 x^2}{2}\right) H_n(\beta x) \tag{14}$$

die Eigenfunktion des harmonischen Oszillators ist.

Wir betrachten die Summe

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta}{2^n n! \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\beta^2(x^2 + x'^2)}{2}\right) H_n(\beta x) H_n(\beta x') \tag{15}$$

mit

$$H_n(\beta x) = (-1)^n e^{\beta^2 x^2} \frac{1}{\beta^n} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\beta^2 x^2}. \tag{16}$$

Die Fourierdarstellung von e^{-x^2} (siehe auch Aufgabe 1b aus Übungsblatt 1) ist

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} e^{-k^2/4}, \\ e^{-\beta^2 x^2} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} e^{-k^2/(4\beta^2)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Somit

$$\begin{aligned} H_n(\beta x) &= (-1)^n e^{\beta^2 x^2} \frac{d^n}{dx^n} \frac{\sqrt{\pi}}{\beta^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} e^{-k^2/(4\beta^2)} \\ &= (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{\beta^{n+1}} e^{\beta^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (ik)^n e^{ikx} e^{-k^2/(4\beta^2)} \qquad (18) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{\beta^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left(-\frac{ik}{\beta}\right)^n e^{ikx - k^2/(4\beta^2)} \quad \Rightarrow \qquad (19) \end{aligned}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\beta n!} e^{\beta^2(x^2+x'^2)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} \left(-\frac{kk'}{2\beta^2}\right)^n e^{ikx+ik'x'} \exp\left(-\frac{k^2+k'^2}{4\beta^2}\right). \tag{20}$$

Nun verwenden wir die Taylorentwicklung:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{kk'}{2\beta^2}\right)^n = \exp\left(-\frac{kk'}{2\beta^2}\right) \qquad \Rightarrow \tag{21}$$

$$S = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}e^{\beta^2(x^2+x'^2)/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'}{2\pi}e^{ikx+ik'x'}\exp\left(-\frac{(k+k')^2}{4\beta^2}\right). \tag{22}$$

Dann führen wir neue Variable ein: $k = q + q'$ und $k' = q - q'$ $\quad \Rightarrow$

$$S = \exp\left(\frac{\beta^2}{2}(x^2+x'^2) - \frac{\beta^2}{4}(x+x'^2)\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq'}{2\pi}e^{iq'(x-x')} \tag{23}$$

$$S = \exp\left(-\frac{\beta^2}{4}(x-x')^2\right)\delta(x-x') = \delta(x-x'). \tag{24}$$

Aufgabe 3 $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

a.)

(i) - **Nein**.

$$\int dr\psi^*(r)a\psi(r) \neq \int dr(a\psi(r))^*\psi(r) \tag{25}$$

Oder: Ja, wenn a reell ist.

(ii) - **Nein**

$$\langle\psi|\partial/\partial x|\phi\rangle = -\langle\phi|\partial/\partial x|\psi\rangle^* \tag{26}$$

(Beweis: siehe (iii))

(iii) - **Ja**. Wir haben

$$\langle\psi|P|\phi\rangle = \frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\frac{d\phi}{dx}\,dx. \tag{27}$$

Wir machen partielle Integration:

$$\langle\psi|P|\phi\rangle = \frac{\hbar}{i}(\phi\psi)_{-\infty}^{\infty} - \frac{\hbar}{i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{d\psi^*}{dx}\phi\,dx = -\frac{\hbar}{i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{d\psi^*}{dx}\phi\,dx = \langle\phi|P|\psi\rangle^* \tag{28}$$

(iv)- **Ja**, P ist hermitisch $\quad\Rightarrow\quad$ P^2 ist hermitisch, und V ist reell $\quad\Rightarrow\quad$ H ist hermitisch.

(v)- **Ja**, weil es gilt:

$$M_1^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

(vi) - **Nein**

$$M_2^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \tag{30}$$

Nur wenn a und d reell sind und $b = c^*$. Die diagonalen Elemente einer hermitischen Matrix sind immer reell.

b.)

Wir verwenden die Induktionsmethode. Wir nehmen an, dass für $n = m$

$$A^mB - BA^m = mA^{m-1}(AB - BA) \tag{31}$$

gilt. Nun zeigen wir, dass es auch für $n = m + 1$ gilt. Wir multiplizieren (31) von links bei A $\quad\Rightarrow$

$$A^{m+1}B - ABA^m = mA^m(AB - BA), \tag{32}$$

wir addiren an beide Seite $A^m(AB - BA)$ $\quad\Rightarrow$

$$A^{m+1}B - ABA^m + A^m(AB - BA) = (m+1)A^m(AB - BA), \tag{33}$$

aber wir haben angenomen, dass (31) gilt $\quad\Rightarrow\quad$ (31) gilt auch für $m + 1$.

$[P, x] = -i\hbar$ (siehe Vorlesung) und $[[P, x], P] = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $[P, x^n] = -ni\hbar x^{n-1}$.