5. Übung zu Theorie D: Quantenmechanik I
Universität Karlsruhe SS 2007

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Anna Posazhennikova, PD Dr. Wolfgang Wenzel

www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Präsentation: Mittwoch, 23.05.2007 in den Übungen

Aufgabe 1: Funktionen von Operatoren

(a) Berechnen Sie e^{σ_z}, wobei $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für einen Operator A

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

gilt. Berechnen Sie auch $\frac{d}{dt}\left(e^{At} e^{Bt}\right)$ für Operatoren A und B.

(c) Zeigen Sie, dass für einen zeitabhängigen Operator $A(t)$ im allgemeinen

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} \neq \frac{dA(t)}{dt} e^{A(t)}$$

gilt. Erläutern Sie warum.

1 Punkt

Aufgabe 2: Baker-Hausdorff-Theorem

Zeigen Sie: Vertauscht A und B mit [A,B], also [A,[A,B]]=[B,[A,B]]=0, dann gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}.$$

(Hinweis: Definieren Sie den Operator $T(\lambda) := e^{A\lambda} e^{B\lambda}$ und betrachten Sie $\frac{\partial T(\lambda)}{\partial \lambda}$. Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 3b, Übungsblatt 4 für den Kommutator $[B, e^{-A\lambda}]$.)

2 Punkte

Aufgabe 3: Diagonalisieren einer Hermite'schen Matrix

Diagonalisieren Sie die Hermite'sche Matrix

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix},$$

mit Hilfe einer unitären Transformation, $H' = UHU^\dagger$, mit

$$U = \exp\left(\frac{i}{2}\varphi\sigma_y\right) \exp\left(\frac{i}{2}\psi\sigma_z\right),$$

und

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Was sind die zugehörigen Eigenzustände?

2 Punkte

Aufgabe 4: Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

(a) Zeigen Sie, dass die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (für zeitunabhängiges H)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H\Psi(t)$$

formal durch $\Psi(t) = U(t,t_0)\Psi(t_0)$ gelöst wird, wobei der "Zeitentwicklungsoperator" $U(t,t_0)$ durch $U(t,t_0) = \exp[-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)]$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass $U(t,t_0)$ unitär ist.

(b) Wenn $H(t)$ von der Zeit abhängt, gilt nur unter gewissen Bedingungen

$$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H(t')}\,.$$

Was sind die Bedingungen an $H(t')$?

2 Punkte