Lösungsvorschlag Theoretische Physik D
Übungsblatt 5

Prof. Dr. G. Schön und Dr. A. Posazhennikova

Sommersemester 2007

Aufgabe 1 $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$

a.)

$$e^A = \sum_n \frac{A^n}{n!} \quad \Rightarrow \tag{1}$$

$$\begin{aligned} e^{\sigma_z} &= \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + ... = \\ &= \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1/e \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

(Wir haben verwendet, dass $\sigma_z^{2n} = 1$ und $\sigma_z^{2n+1} = \sigma_z$ gilt.)

b.)

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} = A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} = Ae^{At}. \tag{3}$$

Weil $[e^{At}, A] = 0$ gilt, dann gilt auch

$$\frac{d}{dt}e^{At} = e^{At}A. \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}e^{At}e^{Bt} = e^{At}\frac{d}{dt}e^{Bt} + \left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)e^{Bt} = e^{At}B\,e^{Bt} + Ae^{At}e^{Bt} = e^{At}B\,e^{Bt} + e^{At}Ae^{Bt} = e^{At}e^{Bt}B + e^{At}Ae^{Bt}. \tag{5}$$

c.)

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n(t)}{n!} \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}A(t)^n = \sum_{m=0}^{n-1}A^m\frac{dA}{dt}A^{n-m-1} \tag{7}$$

(Z.B. $\frac{d}{dt}A^2 = \frac{dA}{dt}A + A\frac{dA}{dt}$ uzw.) Im allgemeinen kommutieren A und $\frac{dA}{dt}$ nicht. Nur wenn sie kommutieren, können wir schreiben

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = \frac{dA(t)}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^{n-1}(t)}{(n-1)!}. \tag{8}$$

Aufgabe 2 $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Zunächst betrachten wir den Operator

$$T(\lambda) = e^{A\lambda}e^{B\lambda}. \tag{9}$$

Wir differenzieren T nach λ

$$\frac{dT}{d\lambda} = Ae^{A\lambda}e^{B\lambda} + e^{A\lambda}Be^{B\lambda} = (A + e^{A\lambda}Be^{-A\lambda})e^{A\lambda}e^{B\lambda} = (A + e^{A\lambda}Be^{-A\lambda})T(\lambda) \tag{10}$$

$[A,[B,A]] = 0 \quad \Rightarrow$ wir können das Ergebnis aus Aufgabe 3b, Übungsblatt 3, verwenden:

$$[B, A^n] = nA^{n-1}[B,A]. \tag{11}$$

Wir berechnen nun $[B, e^{-A\lambda}]$:

$$\begin{aligned}[B, e^{-A\lambda}] &= \sum_n (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}[B, A^n] = \sum_n (-1)^n \frac{\lambda^n}{(n-1)!}A^{n-1}[B,A] \\ &\sum_n (-1)^{n-1}(-1)\frac{\lambda^{n-1}\lambda}{(n-1)!}A^{n-1}[B,A] = -e^{-A\lambda}[B,A]\lambda.\end{aligned} \tag{12}$$

Somit

$$e^{A\lambda}Be^{-A\lambda} = e^{A\lambda}[Be^{-A\lambda} - e^{-A\lambda}B] + B = B - [B,A]\lambda. \tag{13}$$

Daraus folgt,

$$\frac{dT}{d\lambda} = (A + B + [A,B]\lambda)\, T(\lambda). \tag{14}$$

$T(\lambda)$ ist die Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung $T(0) = 1$. Weil die Operatoren $A + B$ und $[A,B]$ untereinander kommutieren, kann Gl. (14) integriert werden, als ob sie nur Zahlen wären $\quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\log T - \log T(0) &= (A+B)\lambda + [A,B]\frac{\lambda^2}{2} \\ T &= e^{(A+B)\lambda}e^{\frac{1}{2}[A,B]\lambda^2}.\end{aligned} \tag{15}$$

Nun $\lambda = 1 \quad \Rightarrow$

$$e^A e^B = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]} \quad \Rightarrow \tag{16}$$

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{17}$$

Aufgabe 3 $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Weil H eine hermite'sche Matrix ist, sind H_{11} und H_{22} reell, und $H_{12} = A + iB$, $H_{21} = A - iB$, wobei A und B reell sind.

Zunächst zeigen wir, dass

$$\begin{aligned}e^{\frac{i}{2}\psi\sigma_z} &= \mathbf{1} + \frac{i}{2}\psi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i}{2}\psi\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\left(\frac{i}{2}\psi\right)^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} + ... = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\psi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\psi}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{18}$$

gilt.

$$\begin{aligned}e^{\frac{i}{2}\phi\sigma_y} &= \mathbf{1} + \frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + ... = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) & \sin(\phi/2) \\ -\sin(\phi/2) & \cos(\phi/2)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{19}$$

(Hier haben wir die Taylor-Entwicklung verwendet: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ...$, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + ...$)

Somit

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2}\cos(\phi/2) & e^{-i\psi/2}\sin(\phi/2) \\ -e^{i\psi/2}\sin(\phi/2) & e^{-i\psi/2}\cos(\phi/2) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Und

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} e^{-i\psi/2}\cos(\phi/2) & -e^{-i\psi/2}\sin(\phi/2) \\ e^{i\psi/2}\sin(\phi/2) & e^{i\psi/2}\cos(\phi/2) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

so dass $UU^\dagger = I \Rightarrow U$ ist unitär.

Die Lösung ist einfacher für $TrH = 1$ (d.h. $H_{11} + H_{22} = 1$). Dann bekommen wir die transformierte Matrix $\tilde{H} = UHU^\dagger$

$$\tilde{H}_{11} = 1 - (1 - 2H_{11})\cos(\phi) + 2\sin(\phi)(A\cos(\psi) - B\sin(\psi)), \tag{22}$$

$$\tilde{H}_{12} = (1 - 2H_{11})\sin(\phi) + 2i(A\sin(\psi) + B\cos(\psi)) + 2\cos(\phi)(A\cos(\psi) - B\sin(\psi)), \tag{23}$$

$$\tilde{H}_{21} = (1 - 2H_{11})\sin(\phi) - 2i(A\sin(\psi) + B\cos(\psi)) + 2\cos(\phi)(A\cos(\psi) - B\sin(\psi)), \tag{24}$$

$$\tilde{H}_{22} = 1 + (1 - 2H_{11})\cos(\phi) - 2\sin(\phi)(A\cos(\psi) - B\sin(\psi)). \tag{25}$$

Diese Matrix ist diagonal, wenn

$$A\sin(\psi) + B\cos(\psi) = 0, \tag{26}$$

$$(1 - 2H_{11})\sin(\phi) + 2\cos(\phi)(A\cos(\psi) - B\sin(\psi)) = 0. \tag{27}$$

D.h.

$$\tan(\psi) = -\frac{B}{A}, \tag{28}$$

$$\tan(\phi) = = -2\frac{A\cos(\psi) - B\sin(\psi)}{1 - 2H_{11}} = -\frac{2\sqrt{A^2 + B^2}}{1 - 2H_{11}}. \tag{29}$$

Mit diesen Ergebnissen ist die Matrix U eindeutig bestimmt und wir bekommen für $\tilde{H}$:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \Lambda & 0 \\ 0 & 1 + \Lambda \end{pmatrix}, \tag{30}$$

wobei $\Lambda = \sqrt{(1 - 2H_{11})^2 + 4(A^2 + B^2)}$ ist.

Die Eigenwerte λ von $\tilde{H}$ sind durch die folgende Gl. definiert

$$Det|\tilde{H} - \lambda I| = 0. \tag{31}$$

Weil $\tilde{H}$ schon diagonal ist, die Eigenwerte sind:

$$\lambda_1 = \tilde{H}_{11} = (1 - \Lambda)/2; \quad \lambda_2 = \tilde{H}_{22} = (1 + \Lambda)/2. \tag{32}$$

Aufgabe 4 $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

a.)

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \tag{33}$$

Unitärität bedeutet: $UU^\dagger = I \quad \Rightarrow$

$$U^\dagger(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}, \tag{34}$$

$$UU^\dagger = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)+\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{1}{2\hbar^2}(t-t_0)^2[H,H]} = I \tag{35}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Psi_0(t_0)\right] = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\right]\Psi_0(t_0)$$
$$= i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}H\right)e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Psi_0(t_0) = H\Psi(t). \tag{36}$$

b.)

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}}\int_{t_0}^{t} dt' H(t') \tag{37}$$

Wie mann aus Aufgabe 1c sehen kann, ist $\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0)$ gleich $H(t)e^{-\frac{i}{\hbar}}\int_{t_0}^{t} dt' H(t')$ ist, nur wenn $[H(t'), H(t'')] = 0$ für $t' \neq t''$.