Aufgabe 1: Eigenwerte und Eigenvektoren eines Operators

In einem drei-dimensionalen Vektorraum betrachten Sie den Operator, dessen Matrix in einer orthonormierten Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ durch

$$L_y = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

gegeben ist.

- Ist L_y Hermite'sch? Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix. (Geben Sie ihre normierte Entwicklung nach den Basisvektoren $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ an.)
- Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren den Orthogonalitätsbedingungen und der Vollständigkeitsrelation genügen.
- Berechnen Sie die Matrizen, die auf die Eigenvektoren projizieren. Bestimmen Sie die unitären Transformationsmatrizen $UL_yU^\dagger$, die L_y diagonalisieren.

3 Punkte

Aufgabe 2: Vertauschende Observable

Ein physikalisches System mit einem drei-dimensionalen Zustandsraum werde in einer aus den drei Kets $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ und $|u_3\rangle$ gebildeten orthonormierten Basis beschrieben. Zwei Operatoren H und A werden in dieser Basis (in der angegebenen Reihenfolge) durch die Matrizen

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

definiert; ω_0 und a sind reelle Konstante.

- Sind H und A Hermite'sch? Geben Sie eine Basis von gemeinsamen Eigenvektoren von H und A an.
- Welche Operatorenmenge $\{H\}$, $\{A\}$, $\{H, A\}$, oder $\{H^2, A\}$ bildet einen vollständigen Satz kommutierender Observabler?

2 Punkte

Aufgabe 3: Nichtvertauschende Observable

Der drei-dimensionale Zustandsraum eines physikalischen Systems werde von der orthonormierten Basis $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ aufgespannt. Der Hamilton-Operator H und die beiden Observablen A und B lauten in dieser Basis:

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei ω_0 , a und b reelle, positive Konstanten sind.

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle.$$

- Zum Zeitpunkt $t = 0$ misst man die Energie des Systems. Welche Werte können sich mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergeben? Berechnen Sie für das System im Zustand $|\Psi(0)\rangle$, den Erwartungswert $\langle H \rangle$ und die Standardabweichung ΔH .
- Statt H misst man zum Anfangszeitpunkt die Observable A . Welche Ergebnisse kann man mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhalten? In welchem Zustand befindet sich das System unmittelbar nach der Messung?
- Berechnen Sie den Zustandsvektor $|\Psi(t)\rangle$ zur Zeit t .
- Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle A \rangle(t)$ und $\langle B \rangle(t)$. Was kann man feststellen?
- Welche Resultate erhält man, wenn man zur Zeit t die Observable A bzw. B misst? Deutung?

3 Punkte