Lösungsvorschlag Theoretische Physik D
Übungsblatt 6

Prof. Dr. G. Schön und Dr. A. Posazhennikova

Sommersemester 2007

Aufgabe 1 **3 Punkte**

a.)

$$L_y = -\frac{i}{\sqrt{2}}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ja, diese Matrix ist Hermite'sch, weil

$$L_y^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2}}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2}}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = L_y. \tag{2}$$

Die charakteristische Gleichung für die Eingenwerte λ lautet:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}}\hbar & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\hbar & -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}}\hbar \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}}\hbar & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad \Rightarrow \tag{3}$$

$$-\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\hbar^2}{2}\right) + \frac{\lambda\hbar^2}{2} = 0, \tag{4}$$

so dass

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \hbar, \quad \lambda_3 = -\hbar. \tag{5}$$

(Alle Eigenwerte sind einfach.)

Die Eigenvektoren $|e_i\rangle$ genügen die folgende Gl.:

$$(L_y - \lambda_i I)\,\vec{e}_i = 0, \tag{6}$$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} c_1^i \\ c_2^i \\ c_3^i \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Wir erhalten dann die Eigenvektoren des Operators L_y

$$|e_i\rangle = c_1^i|1\rangle + c_2^i|2\rangle + c_3^i|3\rangle \tag{8}$$

Für λ_1 bekommen wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}}\hbar & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\hbar & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}}\hbar \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}}\hbar & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \end{pmatrix} = 0. \Rightarrow \tag{9}$$

$c_2 = 0,\ c_1 = c_2 \qquad \Rightarrow$

$$\vec{e}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Aus den Normierungsbedingungen

$$\langle e_i|e_i\rangle = 1, \quad (\vec{e}_i)^*\vec{e}_i = 1, \tag{11}$$

erhalten wir, dass $\alpha^2 = 2 \Rightarrow$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Für λ_2

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\hbar & -i\sqrt{2}\hbar & 0 \\ i\sqrt{2}\hbar & -2\hbar & -i\sqrt{2}\hbar \\ 0 & i\sqrt{2}\hbar & -2\hbar \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 \end{pmatrix} = 0. \quad \Rightarrow \tag{13}$$

$$\vec{e}_2 = \alpha'\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

Aus (11) bekommen wir $(\alpha')^2 = 4$ und

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Und schließlich haben wir für λ_3

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\hbar & -i\sqrt{2}\hbar & 0 \\ i\sqrt{2}\hbar & 2\hbar & -i\sqrt{2}\hbar \\ 0 & i\sqrt{2}\hbar & 2\hbar \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1^3 \\ c_2^3 \\ c_3^3 \end{pmatrix} = 0. \quad \Rightarrow \tag{16}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Die Entwicklung nach den Basisvektoren lautet:

$$|e_i\rangle = \langle 1|e_1\rangle|1\rangle + \langle 2|e_2\rangle|2\rangle + \langle 3|e_3\rangle|3\rangle = c_1^i|1\rangle + c_2^i|2\rangle + c_3^i|3\rangle, \quad \Rightarrow \tag{18}$$

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle \tag{19}$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle - \frac{1}{2}|3\rangle \tag{20}$$

$$|e_3\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle - \frac{1}{2}|3\rangle. \tag{21}$$

b.)

Die Orthogonalitätsbedingung lautet:

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{22}$$

Dann z.B.

$$\langle e_1|e_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 2|\right)\left(\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle - \frac{1}{2}|3\rangle\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \tag{23}$$

$$\langle e_2|e_3\rangle = \left(\frac{1}{2}\langle 1| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 2| - \frac{1}{2}\langle 3|\right)\left(\frac{1}{2}|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle - \frac{1}{2}|3\rangle\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0, \tag{24}$$

uzw. (oder äquivalent kann man auch zeigen, dass $\vec{e}_i^*\vec{e}_j = \delta_{ij}$).

Die Vollständigskeitrelation lautet:

$$\sum_i |e_i\rangle\langle e_i| = 1. \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
|e_1\rangle\langle e_1| &= \frac{1}{2}\left(|1\rangle + |3\rangle\right)\left(\langle 1| + \langle 3|\right) = \frac{1}{2}\left(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1|\right), && (26)\\
|e_2\rangle\langle e_2| &= \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2| + \frac{1}{4}|3\rangle\langle 3| + \frac{i}{2\sqrt{2}}|1\rangle\langle 2| - \frac{i}{2\sqrt{2}}|3\rangle\langle 2| - \frac{1}{4}|1\rangle\langle 3| + ..., && (27)\\
|e_3\rangle\langle e_3| &= \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2| + \frac{1}{4}|3\rangle\langle 3| - \frac{i}{2\sqrt{2}}|1\rangle\langle 2| + \frac{i}{2\sqrt{2}}|3\rangle\langle 2| - \frac{1}{4}|1\rangle\langle 3| + ..., && (28)
\end{aligned}$$

somit

$$\sum_i |e_i\rangle\langle e_i| = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3| = 1. \tag{29}$$

c.)

$$L_y = \sum_{ij} |e_i\rangle\langle e_i|L_y|e_j\rangle\langle e_j| \quad \Rightarrow \tag{30}$$

$$(\tilde{L}_y)_{ij} = \langle e_i|L_y|e_j\rangle, \quad \Rightarrow \tag{31}$$

$$\tilde{L}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix}. \quad \Rightarrow \tag{32}$$

Die unitären Transformationen sind somit

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad U^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Aufgabe 2 — 2 Punkte

a.)

H und A sind Hermite'sch, weil die Matrizen H und A reell und symmetrisch sind.
Der Kommutator $[H, A] = 0$, weil

$$HA = \hbar\omega_0 a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \hbar\omega_0 a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = AH \tag{34}$$

gilt.

Oder: $|u_1\rangle$ ist schon ein gemeinsamer Eigenvektor von H und $A \quad \Rightarrow \quad HA|u_1\rangle = AH|u_1\rangle$. Damit H und A vertauschen, genügt es darum, dass die Einschränkungen dieser Operatoren auf den von $|u_2\rangle$ und $|u_3\rangle$ aufgespannten Unterraum H_2 vertauschen. In diesem Raum wird H durch die Matrix $-\hbar\omega_0 I$ dargestellt (wobei I die 2×2-Einheitsmatrix ist), die mit allen 2×2 Matrizen vertauscht. Damit vertauschen auch H und A. Die Einschränkung von A auf H ist

$$P_{H_2} A P_{H_2} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Die normierten Eigenvektoren dieser 2×2 Matrix sind

$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle + |u_3\rangle\right), \quad (\lambda = a) \tag{36}$$

$$|e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle - |u_3\rangle\right), \quad (\lambda = -a) \tag{37}$$

Diese Vektoren sind auch die Eigenvektoren von H, weil H_2 Eigenraum von H zum Eigenwert $-\hbar\omega_0$ ist. $\Rightarrow$ Die Eigenvektoren von A und H sind

$$|e_1\rangle = |u_1\rangle; \quad (\lambda_H = \hbar\omega_0; \quad \lambda_A = a) \tag{38}$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle + |u_3\rangle\right), \quad (\lambda_H = -\hbar\omega_0; \quad \lambda_A = a) \tag{39}$$

$$|e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle - |u_3\rangle\right), \quad (\lambda_H = -\hbar\omega_0; \quad \lambda_A = -a). \tag{40}$$

b.)

Man merkt, dass sowohl H als auch A einen zweifach entarteten Eigenwert aufweist $\Rightarrow$ H (und A) bildet keinen vollständigen Satz kommutierender Observabler.

Sowohl $|e_1\rangle$ als auch $|e_2\rangle$ oder $\frac{1}{\sqrt{3}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|u_3\rangle$ können Eigenvektoren von A zum Eigenwert a sein. Dagegen bildet die Menge der beiden Operatoren H und A einen vollständigen Satz kommutierender Observabler: es gibt keine zwei Vektoren $|e_i\rangle$, die gleichzeitig Eigenvektoren von H und A zu denselben Eigenwerten sind. Deshalb ist das System der normierten gemeinsamen Eigenvektoren (bis auf Phasenvektoren) eindeutig. Wir bemerken, dass im Eigenraum H_2 von H zum Eigenwert $-\hbar\omega_0$ die Eigenwerte von A verschieden sind; entsprechen sind in dem von den Vektoren $|e_1\rangle$ und $|e_1\rangle$ aufgespanneten Eigenraum von A die Eigenwerte von H verschieden.

Für H^2 sind $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$ und $|e_3\rangle$ Eigenvektoren zum Eigenwert $\hbar^2\omega_0^2$. Man sieht, dass H^2 und A keinen vollständigen Satz kommutierender Observabler bilden, weil zum Eigenpaar $\{\hbar^2\omega_0^2, a\}$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren ($|e_1\rangle$ und $|e_2\rangle$) gehören.

Aufgabe 3 — 3 Punkte

a.)

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle. \tag{41}$$

Also misst man die Eigenwerte (H_{11}, H_{22} und H_{33}) mit den Wahrscheinlichkeiten 1/2, 1/4 und 1/4 (man misst $\hbar\omega_0$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2, und $-\hbar\omega_0$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2 $\Rightarrow$ dass der Mittelwert der gemessenen Energie gleich null ist).

$$H = \sum_{ij} |u_i\rangle\langle u_i|H|u_j\rangle\langle u_j| = \sum_{ij} |u_i\rangle H_{ij}\langle u_j|, \tag{42}$$

wobei $H_{11} = \hbar\omega_0$, $H_{22} = -\hbar\omega_0$, $H_{33} = -\hbar\omega_0$ und für $i \neq j$ sind alle H_{ij} gleich null. Die Erwartungswert $\langle H\rangle$ ist gegeben durch

$$\langle H\rangle = \langle\Psi(0)|H|\Psi(0)\rangle = \sum_{ij}\langle\Psi(0)|u_i\rangle H_{ij}\langle u_j|\Psi(0)\rangle, \tag{43}$$

$$\langle\Psi(0)|u_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{1i} + \frac{1}{2}\delta_{2i} + \frac{1}{2}\delta_{3i}, \tag{44}$$

$$\langle u_j|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{j1} + \frac{1}{2}\delta_{j2} + \frac{1}{2}\delta_{j3}. \quad \Rightarrow \tag{45}$$

$$\langle H\rangle = \frac{1}{2}H_{11} + \frac{1}{4}H_{22} + \frac{1}{4}H_{33} = 0. \tag{46}$$

Die Standardabweichung ist

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2}. \tag{47}$$

$\langle H\rangle^2 = 0$, und

$$\langle H^2\rangle = \sum_{ijk}\langle\Psi(0)|u_i\rangle H_{ij}H_{jk}\langle u_k|\Psi(0)\rangle = \sum_{ijk}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{1i} + \frac{1}{2}\delta_{2i} + \frac{1}{2}\delta_{3i}\right] H_{ij}H_{jk}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{1k} + \frac{1}{2}\delta_{2k} + \frac{1}{2}\delta_{3k}\right] \tag{48}$$

$$= \frac{1}{2}H_{11}^2 + \frac{1}{4}H_{22}^2 + \frac{1}{4}H_{33}^2 = \hbar^2\omega^2. \tag{49}$$

$$\Delta H = \hbar\omega. \tag{50}$$

b.)

Wir verwenden hier die Ergebnisse der Aufgabe 2(a) und berechnen $|\Psi(0)\rangle$ in der e-basis:

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= \langle e_1|\Psi(0)\rangle|e_1\rangle + \langle e_2|\Psi(0)\rangle|e_2\rangle + \langle e_3|\Psi(0)\rangle|e_3\rangle \\ &= \langle u_1|\Psi(0)\rangle|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle u_2| + \langle u_3|\right)|\Psi(0)\rangle|e_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle u_2| - \langle u_3|\right)|\Psi(0)\rangle|e_3\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle. \end{aligned} \tag{51}$$

Man misst also a mit Wahrscheinlichkeit 1.

c.)

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\omega_0 t} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-i\omega_0 t} \\ e^{i\omega_0 t} \\ e^{i\omega_0 t} \end{pmatrix}. \tag{52}$$

d.)

Wir berechnen nun

$$\langle A\rangle(t) = \langle\Psi(t)|A|\Psi(t)\rangle \tag{53}$$

und

$$\langle B\rangle(t) = \langle\Psi(t)|B|\Psi(t)\rangle \tag{54}$$

wie in (a).

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t}|u_1\rangle + \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}|u_2\rangle + \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}|u_3\rangle, \tag{55}$$

$$\langle\Psi(t)|u_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t}\delta_{1i} + \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t}\delta_{2i} + \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t}\delta_{3i}, \tag{56}$$

$$\langle u_j|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t}\delta_{j1} + \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}\delta_{j2} + \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}\delta_{j3}. \quad \Rightarrow \tag{57}$$

$$\langle A\rangle(t) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a = a \tag{58}$$

ist zeitunabhängig.

Und für B bekommen wir

$$\langle B\rangle(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t} & \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t} & \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t} \end{pmatrix} = \frac{b}{\sqrt{2}}\cos(2\omega_0 t) + \frac{b}{4} \quad \Rightarrow \tag{59}$$

B oszilliert.

e.)

(i) Man misst A zur Zeit t.

Wir berechnen nun $|\Psi(t)\rangle$ in der e-Basis:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \langle e_1|\Psi(t)\rangle|e_1\rangle + \langle e_2|\Psi(t)\rangle|e_2\rangle + \langle e_3|\Psi(t)\rangle|e_3\rangle \\ &= \langle u_1|\Psi(t)\rangle|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle u_2| + \langle u_3|\right)|\Psi(t)\rangle|e_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle u_2| - \langle u_3|\right)|\Psi(t)\rangle|e_3\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t}|e_2\rangle. \end{aligned} \tag{60}$$

Man misst also a mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t}.\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

(ii) Man misst B zur Zeit t. Zunächst sollen wir B diagonalisieren: man kann eigentlich sofort sehen, dass die Eigenvektoren von B sind:

$$|f_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle); \quad \lambda_B = b \tag{61}$$

$$|f_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - |u_2\rangle); \quad \lambda_B = -b \tag{62}$$

$$|f_3\rangle = |u_3\rangle; \quad \lambda_B = b, \tag{63}$$

oder

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Nun können wir $|\Psi(t)\rangle$ in der f-Basis berechnen:

$$|\Psi(t)\rangle = \langle f_1|\Psi(t)\rangle|f_1\rangle + \langle f_2|\Psi(t)\rangle|f_2\rangle + \langle f_3|\Psi(t)\rangle|f_3\rangle; \tag{65}$$

$$\langle f_1|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle u_1| + \langle u_2|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t}|u_1\rangle + \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}|u_2\rangle + \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}|u_3\rangle\right) = \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t} \tag{66}$$

$$\langle f_2|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t} - \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t} \tag{67}$$

$$\langle f_3|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t} \tag{68}$$

Ok, also man misst b mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(2\omega_0 t)$, und $-b$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{8} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(2\omega_0 t)$.