Aufgabe 1: “Spin-1/2”

Betrachten Sie ein Teilchen mit Hamiltonoperator

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z$$

und weiteren Observablen $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$ und $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$ mit

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Zeit $t \leq 0$ sei das Teilchen im Grundzustand $|\Psi_0\rangle$.

- Was ist der Zustand $|\Psi_0\rangle$? Berechnen Sie $\langle\Psi_0|\sigma_x|\Psi_0\rangle$ und $\langle\Psi_0|\sigma_z|\Psi_0\rangle$.
- Bei $t_0 = 0$ wird die Observable S_x gemessen. Welche Werte können sich mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergeben? Was sind die zugehörigen Zustände nach der Messung?
- Zum Zeitpunkt $t_1 > 0$ wird eine weitere Messung von S_x vorgenommen. Welche Werte können sich mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergeben? Was ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit, bei der ersten Messung a_1 und bei der zweiten Messung a_2 für alle Kombinationen von a_1 und a_2 zu erhalten?
- In einem anderen Experiment soll bei $t_1 > 0$ eine Messung von S_z vorgenommen werden. Welche Werte können sich mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergeben? Was ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit, bei der ersten Messung a und bei der zweiten Messung b für alle Kombinationen von a und b zu erhalten?
- Was sind die Observablen $S_{zH}(t)$ und $S_{xH}(t)$ im Heisenberg-Bild?
- Berechnen Sie $\langle\Psi_0|S_{xH}(t_1)S_{xH}(0)|\Psi_0\rangle$ bzw.

$$\frac{1}{2}\langle\Psi_0|S_{xH}(t_1)S_{xH}(0) + S_{xH}(0)S_{xH}(t_1)|\Psi_0\rangle.$$

Warum soll man wohl die symmetrisierte Form betrachten? Vergleichen Sie mit (c). (Die Ergebnisse sind verschieden. Warum?)

3 Punkte

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitsverteilung und charakteristische Funktion

Mittels der charakteristischen Funktion $F(z) = \langle e^{izA} \rangle$, wobei $\langle \dots \rangle$ den quantenmechanischen Erwartungswert in einem Zustand $|\Psi_0\rangle$ bezeichnet, können die Erwartungswerte beliebiger Potenzen des Operators A durch Differentiation nach z gewonnen werden. Zeigen Sie dies. Zeigen Sie weiterhin, dass die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung der Größe A den Wert a vorzufinden durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$P_A(a) = \int \frac{dz}{2\pi} e^{-iaz} \langle e^{izA} \rangle.$$

2 Punkte

Aufgabe 3: Vertauschende Observable

Zwei Observablen A und B , die mit einander vertauschen, $[A, B] = 0$, haben eine gemeinsame Basis $|u_{n,p}^i\rangle$ mit

$$\begin{aligned} A|u_{n,p}^i\rangle &= a_n|u_{n,p}^i\rangle \\ B|u_{n,p}^i\rangle &= b_p|u_{n,p}^i\rangle. \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Zustand

$$|\Psi\rangle = \sum_{n,p,i} c_{n,p,i} |u_{n,p}^i\rangle$$

diskutieren Sie das Ergebnis der Messung von erst A und danach B und dasselbe in umgekehrter Reihenfolge. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit das Wertepaar (a_n, b_p) zu messen unabhängig von der Reihenfolge der Messungen ist.

2 Punkte