Lösungsvorschlag Theoretische Physik D
Übungsblatt 7

Prof. Dr. G. Schön und Dr. A. Posazhennikova

Sommersemester 2007

Aufgabe 1 $\boxed{\textbf{3 Punkte}}$

a.)

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z = \begin{pmatrix} -\hbar\omega_0/2 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_0/2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Grundzustand:

$$\langle\Psi_0|H|\Psi_0\rangle = \min. \tag{2}$$

Also man misst entweder $E_1 = -\hbar\omega_0/2$ oder $E_2 = \hbar\omega_0/2$ $\Rightarrow$ Das Grundzustand ist das Zustand mit der Energie $E = \min\{E_1, E_2\} = -\hbar\omega_0/2$.

Oder:

$$|\Psi_0\rangle = \alpha_1|u_1\rangle + \alpha_2|u_2\rangle, \tag{3}$$

wobei $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ eine orthonormierte Basis ist, und $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$. Dann

$$\langle H\rangle = \sum_{ij}\langle\Psi_0|u_i\rangle H_{ij}\langle u_j|\Psi_0\rangle = |\alpha_1|^2 H_{11} + |\alpha_2|^2 H_{22} = |\alpha_1|^2(-\hbar\omega_0) + \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad \Rightarrow \tag{4}$$

$$|\alpha_1|^2 = 1 \quad \Rightarrow \tag{5}$$

$E_{GS} = -\hbar\omega_0/2$ und

$$|\Psi_0\rangle = |u_1\rangle. \tag{6}$$

Nun:

$$\langle\Psi_0|\sigma_z|\Psi_0\rangle = (\sigma_z)_{11} = 1, \quad \langle\Psi_0|\sigma_x|\Psi_0\rangle = (\sigma_x)_{11} = 0. \tag{7}$$

b.)

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Die Eigenwerte sind (wie in der Klausur): $\lambda_1 = \hbar/2$ und $\lambda_2 = -\hbar/2$.
Und die Eigenvektoren sind:

$$\vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle, \quad \text{für} \quad \lambda_1, \tag{10}$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle, \quad \text{für} \quad \lambda_2. \tag{11}$$

$$|\Psi_0\rangle = \langle e_1|\Psi_0\rangle|e_1\rangle + \langle e_2|\Psi_0\rangle|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle \quad \Rightarrow \tag{12}$$

man misst λ_1 mit der Wahrscheilichkeit 1/2 und an misst λ_2 mit der Wahrscheinlichkeit 1/2. Nach der Messung sind $|e_1\rangle$ und $|e_2\rangle$ die zugehörigen Zustände zu λ_1 und λ_2.

Tabelle 1: Aufgabe 1(c).

	λ_1	λ_2
λ_1	1/2	0
λ_2	0	1/2

Tabelle 2: Aufgabe 1(d).

	λ_1	λ_2
λ_1	1/4	1/4
λ_2	1/4	1/4

c.)

Nach der weiteren Messung von S_x bleibt das System im Zustand, in dem es sich vor t_1 befand: siehe Tabelle 1.

d.)

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Die Eigenwerte sind: $\lambda_1 = \hbar/2$ und $\lambda_2 = -\hbar/2$.
Und die Eigenvektoren sind:

$$|f_1\rangle = |u_1\rangle, \quad \text{für} \quad \lambda_1, \tag{14}$$

$$|f_2\rangle = |u_2\rangle, \quad \text{für} \quad \lambda_2. \tag{15}$$

$$|f_1\rangle = \langle e_1|f_1\rangle|e_1\rangle + \langle e_2|f_1\rangle|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle \tag{16}$$

$$|f_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle \quad \Rightarrow \tag{17}$$

(i) für $t < t_1$ befindet sich das System im Zustand $|e_1\rangle$ $\quad\Rightarrow\quad$ die Wahrscheinlichkeit einer Messung von λ_1 ist $1/2$ und von λ_2 ist $1/2$.
(ii) dasselbe gilt wenn sich das System für $t < t_1$ im Zustand $|e_2\rangle$ befindet.
Siehe Tabelle 2.

e.)

$$S_{zH}(t) = e^{iHt/\hbar} S_z e^{-iHt/\hbar} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} = S_z, \tag{18}$$

$$S_{xH}(t) = e^{iHt/\hbar} S_z e^{-iHt/\hbar} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega_0 t} \\ e^{i\omega_0 t} & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

f.)

$$\langle \Psi_0| = \langle u_1| \tag{20}$$

$$S_{xH}(t_1)S_{xH}(0) = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t_1} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 t_1} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$S_{xH}(0)S_{xH}(t_1) = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_0 t_1} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

$$\langle\Psi_0|S_{xH}(t_1)S_{xH}(0)|\Psi_0\rangle = [S_{xH}(t_1)S_{xH}(0)]_{11} = \frac{\hbar^2}{4}e^{-i\omega_o t_1}, \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}\langle\Psi_0|S_{xH}(t_1)S_{xH}(0)+S_{xH}(0)S_{xH}(t_1)|\Psi_0\rangle = \frac{1}{2}[S_{xH}(t_1)S_{xH}(0)+S_{xH}(0)S_{xH}(t_1)]_{11} = \frac{\hbar^2}{4}\cos(\omega_0 t_1). \tag{24}$$

Simmetrisierte Form ist hermite'sch und hat reelle Erwartungswerte.

Aufgabe 2 $\boxed{\text{2 Punkte}}$

i.)

$$F(z) = \langle e^{izA}\rangle \tag{25}$$

$$\langle A^n\rangle = \frac{1}{i^n}\left(\frac{d}{dz}\right)^n \langle e^{izA}\rangle\Big|_{z=0} \tag{26}$$

$$= \frac{1}{i^n}\left(\frac{d}{dz}\right)^n F(z)\Big|_{z=0} \tag{27}$$

ii.)

Die Wahrscheinlichkeit lautet

$$P_A(a) = |\langle\Psi_0|e_a\rangle|^2 \tag{28}$$

mit

$$A|e_a\rangle = a|e_a\rangle, \tag{29}$$

$$\langle\Psi_0|A|e_a\rangle = a\langle\Psi_0|e_a\rangle. \tag{30}$$

Nun:

$$\langle e^{izA}\rangle = \langle\Psi_0|e^{izA}|\Psi_0\rangle = \sum_{ab}\langle\Psi_0|e_a\rangle\langle e_a|e^{izA}|e_b\rangle\langle e_b|\Psi_0\rangle = \sum_b\langle\Psi_0|e_b\rangle e^{izb}\langle e_b|\Psi_0\rangle \tag{31}$$

$$= \sum_b e^{izb}|\langle\Psi_0|e_b\rangle|^2 \quad\Rightarrow \tag{32}$$

$$\langle e^{izA}\rangle = \sum_b e^{izb}P_A(b) \quad\Rightarrow \tag{33}$$

$$\int\frac{dz}{2\pi}e^{-iaz}\langle e^{izA}\rangle = \sum_b\int\frac{dz}{2\pi}e^{-iaz}e^{izb}P_A(b) = \sum_b\delta_{ab}P_A(b) = P_A(a). \tag{34}$$

Aufgabe 3 $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Cohen-Tannoudji *et al*, (DV) §3.3.6, S. 209-212