8. Übung zur Theorie D
Universität Karlsruhe

Quantenmechanik I
SS2007

Prof. Dr. Gerd Schön – Dr. Anna Posazhenikova, Dr. Wolfgang Wenzel

Aufgabe 1:

Leiten Sie aus der Definition der Drehimpulsoperatoren in kartesischen Koordinaten die Darstellung in sphärischen Koordinaten, $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, her:

$$L_x = \hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$L_y = \hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$L_z = -\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Berechnen Sie daraus auch $\hat{L}^2$ in sphärischen Koordinaten.

Nützlich ist die Kettenregel: Sei $f(x, y, z) = f(r, \theta, \phi)$, dann ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial r}$$

3 Punkte

Aufgabe 2:

a) Wenn die Operatoren A und B mit Ihrem Operator vertauschen, gilt:

$$[A, F(B)] = [A, B] F'(B), \text{ wobei } F'(x) = \frac{dF}{dx}.$$

b) Zeigen Sie, dass der Operator:

$$\mathcal{S}(\lambda) = \exp(\hat{\lambda} p / \hbar)$$

unitär ist.

c) Zeigen Sie, dass gilt: $\hat{x} \mathcal{S}(\lambda) = \mathcal{S}(\lambda) (\hat{x} + \lambda)$.

d) Zeigen Sie: $\mathcal{S}(\lambda) |q\rangle = |\lambda + q\rangle$. Was bedeutet dieses Ergebnis?

2 Punkte

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass für einen allgemeinen Spin $\frac{1}{2}$ Zustand

$$|\psi\rangle = e^{i\frac{\phi}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

die Unschärferelation gilt: $\Delta \sigma_x \Delta \sigma_y = \langle \sigma_z \rangle$.

2 Punkte