9. Übung zur Theorie D **Quantenmechanik I**
Universität Karlsruhe **SS2007**

Prof. Dr. Gerd Schön – Dr. Anna Posazhenikova, Dr. Wolfgang Wenzel

Aufgabe 1: Die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta,\varphi)$ lassen sich durch die Legendre-Polynome ausdrücken. Es gilt für m=0:

$$Y_l^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}P_l(\cos\theta)$$

Die Legendre-Polynome erfüllen $P_0(x)=1$ und $P_1(x)=x$ und die Rekursionsrelation

$$(l+1)P_{l+1}(x)=(2l+1)\,x\,P_l(x)-l\,P_{l-1}(x)$$

Die Kugelflächenfunktionen für $m\neq 0$ ergeben sich über die Auf-/Absteigeoperatoren $L_{+/-}$.

a) Berechnen Sie $Y_3^0(\theta,\varphi)$ explizit unter Verwendung der obigen Angaben.

b) Bestimmen Sie $Y_3^m(\theta,\varphi)$ für m = 1,2,3. Wie können Sie die restlichen Funktionen für m < 0 einfach bestimmen?

c) Zeigen Sie explizit, dass $Y_3^3(\theta,\varphi)$ eine Eigenfunktionen von L^2 ist (Benutzen Sie L^2 in Kugelkoordinaten aus Blatt 8, Aufgabe 1).

3 Punkte

Aufgabe 2: Ein Spin-½-System befinde sich zur Zeit t=0 im Zustand $|\psi(0)\rangle=\alpha|+\rangle+\beta|-\rangle$.

a) Was ist das Ergebnis einer Messung in einem Stern-Gerlach-Experiment mit Ausrichtung des Magnetfeldes in y-Richtung?

b) Nehmen Sie an, das Magnetfeld zeige in y-Richtung mit $H=-\gamma\frac{\hbar}{2}B_y\,\sigma_y$ .Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Systems $|\psi(t)\rangle$ und den Erwartungswert $\langle S_z(t)\rangle$.

2 Punkte

Aufgabe 3: Betrachten Sie ein System von zwei Spin-½-Teilchen mit den 4 Basiszuständen $|\pm,\pm\rangle$. Das System sei zur Zeit t = 0 im Zustand $|\psi(0)\rangle=\frac{1}{2}|+,+\rangle+\frac{1}{2}|+,-\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|-,-\rangle$.

a) Zur Zeit t=0 wird S_{1z} gemessen. Was ist die Wahrscheinlichkeit $-\hbar/2$ zu messen? Was ist der Zustand nach der Messung. Wenn danach S_{1x} gemessen wird, welche Ergebnisse sind möglich und mit welcher Wahrscheinlichkeit?

b) Wenn gleichzeitig S_{1z} und S_{2z} gemessen werden, was ist die Wahrscheinlichkeit entgegengesetzte bzw. gleiche Werte zu finden?

c) Berechnen Sie $\langle\vec{S}_1\rangle$ und $\langle\vec{S}_2\rangle$. Zeigen Sie, dass die Beträge dieser Vektoren kleiner als $\hbar/2$ sind. Interpretieren Sie das Ergebnis. Für welche Zustände ist der Betrag gleich $\hbar/2$?

d) Anstelle der Messungen entwickelt sich das System unter dem Einfluss des Hamilton-Operators $H=-\omega_1 S_{1z}-\omega_2 S_{2z}$. Berechnen Sie $|\psi(t)\rangle$.

4 Punkte