Aufgabe 1: Die Legendre Polynome sind:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{3}{2}(5x^3 - x)$$

Daraus erhalten wir:

$$Y_3^0(\theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}} \cdot (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \qquad = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}} \cdot \frac{(-3x^2z - 3y^2z + 2z^3)}{r^3}$$

Wenn wir darauf

$$L_\pm = \mathrm{h}e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

anwenden ergeben sich:

$$Y_3^1(\theta,\varphi) = \frac{-1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}} \cdot e^{i\varphi} \cdot \sin\theta \cdot (5\cos^2\theta - 1) \qquad = \frac{-1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}} \cdot \frac{(-x^3 - ix^2y - xy^2 + 4xz^2 - iy^3 + 4iyz^2)}{r^3}$$
$$Y_3^2(\theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}} \cdot e^{2i\varphi} \cdot \sin^2\theta \cdot \cos\theta \qquad = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}} \cdot \frac{(x^2z + 2ixyz - y^2z)}{r^3}$$
$$Y_3^3(\theta,\varphi) = \frac{-1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}} \cdot e^{3i\varphi} \cdot \sin^3\theta \qquad = \frac{-1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}} \cdot \frac{(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3)}{r^3}$$

Note: Es ist sinnvoll die Studenten auf die Interpretation in XY Koordinaten hinzuweisen.
Die Funktionen für negative m ergeben sich am einfachsten aus: $Y_l^{-m}(\theta,\varphi) = Y_l^m(\theta,\varphi)^*$
Mit

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\mathrm{Cos}\theta}{\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\mathrm{Sin}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right).$$

angewandt auf:

$$Y_3^{-3}(\theta,\varphi) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}} \cdot e^{-3i\varphi} \cdot \sin^3\theta \qquad = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}} \cdot \frac{(x^3 - 3ix^2y - 3xy^2 + iy^3)}{r^3}$$

ergibt sich $\frac{\partial Y_3^3}{\partial\theta}$: $3\cos\theta\sin^2\theta\, e^{3i\varphi}$ (ohne den Vorfaktor, in allen Termen gleich).

Term 1	$3(-\sin^3\theta + 2\cos^2\theta\sin\theta)e^{3i\varphi} = \left(-3\sin^3\theta + 6(1-\sin^2\theta)\sin\theta\right)e^{3i\varphi}$
Term 2	$3\cos^2\theta\sin\theta\, e^{3i\varphi}$
Term 3	$-9\sin\theta\, e^{3i\varphi}$

Die Terme proportional zu $\sin\theta$ fallen raus, der Rest ist $12Y_3^3$.

Aufgabe 2:

a) Wir brauchen die Eigenbasis von $S_y : |\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm i|-\rangle)$. Damit ergeben sich die Amplituden für die Beobachtung der Eigenzustände in y-Richtung als: $p_\pm = \frac{1}{2}|(\alpha \mp i\beta)|^2$.

b) Die Zeitentwicklung des Systems ergibt sich dann zu:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - i\beta)e^{i\omega t/2}|+\rangle_y + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + i\beta)e^{-i\omega t/2}|-\rangle_y$$

$$S_z|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}(\alpha - i\beta)e^{i\omega t/2}|-\rangle_y + \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}(\alpha + i\beta)e^{-i\omega t/2}|+\rangle_y$$

$$\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}(\alpha + i\beta)(\alpha^* + i\beta^*)e^{i\omega t} + \frac{\hbar}{2}(\alpha - \beta)(\alpha^* - i\beta^*)e^{-i\omega t}$$

Das kann man weiter vereinfachen zu: $\frac{\hbar}{2}\mathrm{Re}(\alpha + i\beta)(\alpha^* + i\beta^*)e^{i\omega t}$

Aufgabe 3:

a) $P_{1z}(+\frac{\hbar}{2}) = |+,+\rangle\langle +,+| + |+,-\rangle\langle +,-|$, also $\langle\psi(0)|P_{1z}(+\frac{\hbar}{2})|\psi(0)\rangle = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Zustand danach: $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}|+,+\rangle + \frac{1}{2}|+,-\rangle$.

Analog: $P_{1z}(-\frac{\hbar}{2}) = |-,+\rangle\langle -,+| + |-,-\rangle\langle -,-|$, d.h., $\langle\psi(0)|P_{1z}(+\frac{\hbar}{2})|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}$

Zustand danach: $|\psi_2\rangle = |-,-\rangle$.

Für einen einzelnen Spin ist der Projektor auf den Eigenwert $\pm\frac{\hbar}{2}$ gegeben durch:

$p_x(\pm\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)$. Der Projektor im 2-Spin Raum ist daher:

$P_{2x}(\pm\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,+\rangle\langle +,+| \pm |-,+\rangle\langle +,-|) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle\langle +,-| \pm |-,-\rangle\langle -,-|)$. Daraus ergibt sich:

$$\langle\psi_2|P_{2x}(\pm\frac{\hbar}{2})|\psi_2\rangle = \pm\frac{1}{2}$$

b) Tabelle der Ausgänge des Messergebnisses:

S_{1z}	S_{1z}	Wahrscheinlichkeit
$+\frac{\hbar}{2}$	$+\frac{\hbar}{2}$	$\frac{1}{4}$
$+\frac{\hbar}{2}$	$-\frac{\hbar}{2}$	$\frac{1}{4}$

$-\frac{h}{2}$	$+\frac{h}{2}$	0
$-\frac{h}{2}$	$-\frac{h}{2}$	$\frac{1}{2}$

Die Wahrscheinlichkeit für gleichgerichtete Spins ist daher $\frac{3}{4}$, für entgegengesetzte der jämmerliche Rest.

c) Erwartungswert für S_1:

$S_{1x}\left\|\psi\right\rangle = \frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}\left\|-,+\right\rangle + \frac{1}{2}\left\|-,-\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|+,-\right\rangle\right]$	$\left\langle\psi\right\|S_{1x}\left\|\psi\right\rangle = \frac{h}{2\sqrt{2}}$
$S_{1y}\left\|\psi\right\rangle = \frac{ih}{2}\left[\frac{1}{2}\left\|-,+\right\rangle + \frac{1}{2}\left\|-,-\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|+,-\right\rangle\right]$	$\left\langle\psi\right\|S_{1y}\left\|\psi\right\rangle = 0$
$S_{1z}\left\|\psi\right\rangle = \frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}\left\|+,+\right\rangle + \frac{1}{2}\left\|+,-\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|-,-\right\rangle\right]$	$\left\langle\psi\right\|S_{1z}\left\|\psi\right\rangle = 0$

Erwartungswert für S_2:

$S_{2x}\left\|\psi\right\rangle = \frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}\left\|+,-\right\rangle + \frac{1}{2}\left\|+,+\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|+,+\right\rangle\right]$	$\left\langle\psi\right\|S_{2x}\left\|\psi\right\rangle = \frac{h}{4}$
$S_{2y}\left\|\psi\right\rangle = \frac{ih}{2}\left[\frac{1}{2}\left\|+,-\right\rangle - \frac{1}{2}\left\|+,+\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|-,+\right\rangle\right]$	$\left\langle\psi\right\|S_{2y}\left\|\psi\right\rangle = 0$
$S_{2z}\left\|\psi\right\rangle = \frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}\left\|+,+\right\rangle - \frac{1}{2}\left\|+,-\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|-,-\right\rangle\right]$	$\left\langle\psi\right\|S_{2z}\left\|\psi\right\rangle = -\frac{h}{4}$

Der Erwartungswert ist nur dann maximal, wenn der Zustand ein äußeres Produkt ist, sonst gibt es Interferenz.

d) Da die einzelnen Terme diagonal in H sind, ergibt sich:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{2}e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t}\left|+,+\right\rangle + \frac{1}{2}e^{i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t}\left|+,-\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t}\left|-,-\right\rangle$$