10. Übung zur Theorie D **Quantenmechanik I**
Universität Karlsruhe **SS2007**

Prof. Dr. Gerd Schön – Dr. Anna Posazhenikova, Dr. Wolfgang Wenzel

Aufgabe 1: Betrachten Sie zwei wechselwirkende Spin-½-Teilchen (i=1,2) mit folgendem Hamilton-Operator

$$H = -J\,\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = -J\left(S_{x1}S_{x2} + S_{y1}S_{y2} + S_{z1}S_{z2}\right) .$$

a) Schreiben Sie den Hamiltonoperator als Matrix in den (z.B. in Aufgabenblatt 9 eingeführten) 4 Basiszuständen $\left|\pm,\pm\right\rangle$, die die gemeinsamen Eigenzustande von S_{z1}und S_{z2} bezeichnen.

Hinweis: Drücken Sie S_{xi} und S_{yi} durch $S_{\pm i} = \left(S_{xi} \pm i\,S_{yi}\right)/2$ aus und betrachten Sie die Wirkung dieser Auf- und Absteigeoperatoren auf die Basiszustände. Die meisten der gesuchten Matrixelemente sind gleich 0.

b) Bestimmen Sie die Eigenzustände und Energieeigenwerte des Hamilton-Operators.

c) Zeigen Sie, dass die in b) bestimmten Eigenzustände des Hamilton-Operators zugleich Eigenzustände des Gesamtspins $\mathbf{S}^2 = \left(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2\right)^2$ sind. Was sind die Eigenwerte von $\mathbf{S}^2$?

d) Was sind die Eigenwerte der z-Komponente des Gesamtspins $S_z = S_{z1} + S_{z2}$ und die Energieeigenwerte, wenn zusätzlich ein Magnetfeld in z-Richtung angelegt ist? Ordnen Sie die Zustände in einen Singlet und drei Triplet-Zustände.

e) Erläutern Sie die Konsistenz mit den allgemeinen Regeln für Drehimpulse.

5 Punkte

Aufgabe 2: Betrachten Sie ein Teilchen im Potential:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & sonst \end{cases}$$

als ungestörtes System. Ein Störungspotential ist nun gegeben durch:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 < x < \gamma a \\ 0 & sonst \end{cases}$$

mit $\gamma < 1$.

a) Berechnen Sie die Energien des Systems bis 2.Ordnung Störungsrechnung.
b) Berechnen Sie die Zustände des Systems bis 1.Ordnung Störungsrechnung.
c) Skizzieren Sie die Energiekorrektur als Funktion von γ .

Hinweis: Nach Herleitung der allgemeinen Formeln können Sie sich auf den Spezialfall $\gamma = 1/2$ beschränken. Nützlich ist die Formel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n^2 - a^2\right)^3} = \frac{\pi}{16a^3}\cot(\pi a) + \frac{\pi^2}{16a^2}\operatorname{cosec}^2(\pi a)(1 - 2\pi a \cot(\pi a))$$

die Sie **<u>nicht</u>** herleiten sollen.

3 Punkte