

Aufgabe 1:

Betrachten Sie einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator in kartesischen Koordinaten:

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2),$$

Die Zustände dieses Systems können Sie (ähnlich dem in der Vorlesung behandelten System zweier unabhängiger Spins) als äußeres Produkt der Eigenzustände von eindimensionalen Oszillatoren betrachten: $|n, m\rangle$ bezeichnet dann den Zustand, in dem sich der erste Oszillator (x-Koordinate) im Zustand $|n\rangle$ und der zweite Oszillator (y-Koordinate) im Zustand $|m\rangle$ befindet. Nun stören wir dieses System durch

$$W = \alpha m\omega^2 xy$$

- Berechnen Sie die Energiekorrektur des Grundzustands in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie.
- Berechnen Sie die Energiekorrekturen zu den beiden ersten angeregten Zuständen in erster Ordnung Störungstheorie und geben Sie die sich durch die Störung ergebenden Wellenfunktionen nullter Ordnung (die Eigenvektoren des entsprechenden Eigenwertproblems) an.
- Überführen Sie den Gesamthamiltonoperator durch Umschreiben auf die Koordinaten: $(x \pm y) / \sqrt{2}$ in diagonale Form. Interpretieren Sie dieses Ergebnis, indem Sie die Eigenmoden des entsprechenden klassischen Systems analysieren.

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung eingeführte Formel:

$$\langle n | x | m \rangle = \delta_{m, n-1} \sqrt{\frac{m+1}{2\beta^2}} + \delta_{m, m+1} \sqrt{\frac{m}{2\beta^2}}.$$

3 Punkte

Aufgabe 2:

Betrachten Sie ein Elektron in einem linearen Molekül, das aus drei äquidistanten Atomen (A,B,C) gebildet wird. Mit $|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle, |\varphi_c\rangle$ bezeichnen wir die drei orthonormierten Zustände des Elektrons, die zu den drei um die Kerne lokalisierten Wellenfunktionen gehören. Vernachlässigt man die Möglichkeit, dass das Elektron von einem Kern zum anderen zu wechseln vermag, so kann es durch den Hamiltonoperator H_0 beschrieben werden, der als Eigenzustände die drei Vektoren $|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle, |\varphi_c\rangle$ zum selben Eigenwert E_0 hat. Durch einen zusätzlichen Hamiltonoperator W sei nun die Kopplung der Atome beschrieben, für die gilt

$$W|\varphi_a\rangle = -\alpha|\varphi_b\rangle$$

$$W|\varphi_b\rangle = -\alpha|\varphi_a\rangle - \alpha|\varphi_c\rangle$$

$$W|\varphi_c\rangle = -\alpha|\varphi_b\rangle$$

wobei α reell und positiv sei.

- Berechnen Sie die Energien und stationären Zustände $|\phi_n\rangle$ des Hamilton-Operators $H = H_0 + W$.
- Für $t = 0$ sei das Elektron im Zustand $|\varphi_a\rangle$. Beschreiben Sie qualitativ die Lokalisierung des Elektrons zu späteren Zeiten. Gibt es Zeiten in denen das Elektron vollständig um einen der drei Kerne lokalisiert ist?
- Wir definieren die Observable der Ortskoordinate D mit den Eigenzuständen $|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle, |\varphi_c\rangle$ und Eigenwerten $-d, 0, +d$. Man misst D zum Zeitpunkt t . Mit welchen Wahrscheinlichkeiten kann man welche Werte finden?
- Die allgemeine Zeitentwicklung eines Zustands $|\psi(t=0)\rangle$ wird durch:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} |\phi_n\rangle$$

Beschrieben, wobei $c_n = \langle \phi_n | \psi(t=0) \rangle$. Schreiben Sie einen allgemeinen Ausdruck für $\langle \psi(t) | D | \psi(t) \rangle$ an.

5 Punkte