Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik D – Quantenmechanik I
Sommersemester 2010

Übungsblatt 1 Abgabe am 19.4.2010, 10:00

Name: ______________________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ______

Aufgabe 1 - Fourier-Transformation (9 Punkte)

Wir definieren die Fouriertransformation und ihr Inverses für integrable, quadratintegrable Funktionen auf der reellen Achse wie folgt:

$$\widetilde{f}(k) \equiv (\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x), \qquad (\mathcal{F}^{-1}\widetilde{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \widetilde{f}(k). \tag{1}$$

Im Folgenden wollen wir einige Eigenschaften der Fourier-Transformation beweisen. Dabei dürfen Sie die Reihenfoge von Integralen beliebig vertauschen – Sie brauchen also die Konvergenz nicht erst zu beweisen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ in der Tat invers zueinander sind. Verwenden Sie dazu die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = 2\pi\delta(x). \tag{2}$$

(*ein Punkt*)

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{F}f')(k) = ik(\mathcal{F}f)(k)$ und drücken Sie $\mathcal{F}(f_1 f_2)$ durch $\mathcal{F}f_1$ und $\mathcal{F}f_2$ aus. Dabei ist f' die Ableitung von f, und $f_1 f_2(x)$ das punktweise Produnkt der Funktionen f_1 und f_2. (*2 Punkte*)

(c) Wir definieren Translation, Phasenverschiebung und Skalierung für eine Funktion f als

$$(T_a f)(x) := f(x-a), \qquad (\mu_b f)(x) := e^{ibx} f(x), \qquad (\delta_\lambda f)(x) = \lambda^{-\frac{1}{2}} f(x/\lambda) \tag{3}$$

mit $a, b, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Zeigen Sie, dass

$$(\mathcal{F}T_a f) = \mu_{-a}\mathcal{F}f, \qquad \mathcal{F}\mu_b f = T_b \mathcal{F}f, \qquad \mathcal{F}\delta_\lambda f = \delta_{\lambda^{-1}}\mathcal{F}f. \tag{4}$$

(*3 Punkte*)

(d) Zeigen Sie Parsevalsche Gleichung (auch bekannt als Plancherel-Formel)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\widetilde{f}(k)|^2 \tag{5}$$

(*ein Punkt*)

(e) Berechnen Sie die Fourier-Transformation der Gaußfunktion

$$f(x;\sigma,x_0,k_0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-i\frac{x_0 k_0}{2}} e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} e^{ik_0 x}. \tag{6}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f(k;1,0,0)$ die Fourier-Transformation von $f(x;1,0,0)$ ist, z.B. indem Sie eine Differentialgleichung und Anfangsbedingung finden, die $f(x;1,0,0)$

eindeutig bestimmen, und die Fourier-Transformation dieser Gleichung betrachten. Sie können auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \exp(-x^2/2) = \sqrt{2\pi} \tag{7}$$

ohne Beweis verwenden. (*2 Punkte*)

Aufgabe 2 - Zur Bedeutung der Gruppengeschwindigkeit (3 Punkte)

Wir betrachten die Bewegung eines Wellenpaketes in einer räumlichen Dimension. Seien dazu $e_k(t, x) = \exp(ikx - i\omega(k)t)$ Lösungen einer linearen Wellengleichung mit der Dispersionsrelation $\omega(k)$. Wir betrachten ein Wellenpaket $W(t, x)$, welches zur Zeit $t = 0$ im Ortsraum um x_0 und im Impulsraum um k_0 lokalisiert ist. $W(t, x)$ kann durch die Lösungen e_k wie folgt ausgedrückt werden:

$$W(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, f(k) e_k(t, x) \tag{8}$$

(a) Drücken Sie $f(k)$ durch die Fourier-Transformation von $W(t, x)$ zur Zeit $t = 0$ aus. (*ein Punkt*)

(b) Nehmen Sie an, dass sich $\omega(k)$ in der Umgebung von k_0 nur wenig verändert, und nähern Sie es durch eine Taylorentwicklung bis zur linearen Ordnung in k. Unter Verwendung von (a), zeigen Sie, dass sich in dieser Näherung die Form des Wellenpaketes zeitlich nicht ändert, und es sich mit der *Gruppengeschwindigkeit*

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k_0) \tag{9}$$

bewegt. (*2 Punkte*)