Stand: 19. April 2010 9:00

Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik D – Quantenmechanik I

Sommersemester 2010

Übungsblatt 2 — Abgabe am 26.4.2010, 10:00

Name: ______________________________ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Aufgabe 3 - Das Bohrsche Atommodell des Wasserstoffatoms (7 Punkte)

Wir betrachten das Bohrsche Atommodell des Wasserstoffatoms. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass der Kern ruht.

(a) Betrachten Sie zuerst das klassische Model: Finden Sie den Zusammenhang zwischen Umlauffrequenz und Radius der Bahn für ein Elektron dass auf einer Kreisbahn um den Kern umläuft. (*ein Punkt*)

(b) Nun nehmen Sie mit Bohr an, dass die Elektronen immer noch klassischen Trajektorien folgen, aber nicht alle diese Trajektorien erlaubt sind. Nur solche sind erlaubt, auf denen für den Drehimpuls L gilt:

$$L = n\hbar, \qquad n = 1, 2, 3, \dots . \tag{1}$$

Berechnen Sie die Energie des Elektrons in Abhängigkeit von der Quantenzahl n. (*3 Punkte*)

(c) Experimentell wurde gefunden, dass die Wellenlängen der Spektrallinien des Wasserstoffatoms sehr gut durch die sogenannte *Rydberg-Ritz-Formel* beschrieben werden:

$$\frac{1}{\lambda_{nm}} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \tag{2}$$

wobei R_H eine zunächst experimentell bestimmte Konstante ist. Erklären Sie (2) mithilfe der Borschen Hypothese (1) und machen Sie eine Vorhersage für den Wert von R_H. (*ein Punkt*)

(d) De Broglie fand im Rahmen seiner Theorie der Materiewellen eine heuristische Begründung von Bohrs Hypothese (1), indem er annahm, dass der Umfang der Elektronenbahn ein Vielfaches der Wellenlänge der Materiewelle des Elektrons sein muss. Vollziehen Sie de Broglies Argument nach. (*ein Punkt*)

(e) Nennen Sie mindestens einen Grund, warum das Bohrsche Atommodell noch keine zufriedenstellende Beschreibung des Wasserstoffatoms liefert. (*ein Punkt*)

Aufgabe 4 - Dispersion eines Wellenpakets (8 Punkte)

Wir betrachten ein Wellenpaket, das die Bewegung eines Teilchens mit Masse m in einer Dimension beschreiben soll. Zur Zeit $t = 0$ habe es die Form

$$\Psi(t = 0, x) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\frac{a^2(k-k_0)^2}{4}} \, dk \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\Psi}(0,k)|^2 \, dk, \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (k-k_0)^2 |\widetilde{\Psi}(0,k)|^2 \, dk. \tag{4}$$

Geben Sie eine Interpretation der Parameter k_0 und a an. Begründen Sie Ihre Antwort. (*2 Punkte*)

(b) Nun betrachten wir die zeitliche Entwicklung des Wellenpakets. Wir nehmen dabei an, dass es sich um ein freies Teilchen handelt. Zeigen Sie, dass

$$\Psi(t,x) = (2\pi)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2a}{b^2}} e^{-\frac{1}{b^2}\left(x^2 + i a^2 k_0 (k_0 \hbar t/(2m) - x)\right)} \tag{5}$$

mit $b^2 = a^4 + 2i\hbar t/m$. (*2 Punkte*)

(c) Um (5) zu interpretieren, zeigen Sie, dass

$$|\Psi(t,x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{\sqrt{a^4 + 4\hbar^2 t^2/m^2}} e^{-\frac{2a^2}{a^4 + 4\hbar^2 t^2/m^2}(x - \hbar k_0 t/m)^2} \tag{6}$$

und berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(t,x)|^2 \, dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x - \hbar k_0 t/m)^2 |\Psi(t,x)|^2 \, dx. \tag{7}$$

Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. (*3 Punkte*)

(d) Die Gleichung (5) zeigt unter anderem, dass das Wellenpaket mit der Zeit zerfliesst. Betrachten Sie den Fall, dass das betrachtete Teilchen eine als punktförmig angenommene Fliege ($m = 10^{-3}$kg) ist, und die anfängliche Ausdehnung des Wellenpakets klein (sagen wir 10^{-10}m) ist. Wie lange dauert es, bis sich das Wellenpaket bis auf makroskopische Breite (z.B. 1 cm) verbreitert hat? (*ein Punkt*)