Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik D – Quantenmechanik I

Sommersemester 2010

Übungsblatt 3

Abgabe am 3.5.2010, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Aufgabe 5 - Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden (8 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Wellenfunktion eines Teilchens in einem Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden, zunächst in einer, dann in drei Dimensionen.

- (a) Ein Teilchen (Masse: m) bewege sich in einer Dimension unter dem Einfluss eines Potentials

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -a \leq x \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \quad (1)$$

wobei $a > 0$. Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf, und begründen Sie, warum alle Lösungen für $x \geq a$ und $x \leq -a$ verschwinden müssen, z.B. indem Sie $V(x)$ als Grenzfall eines endlichen Potentialtopfs betrachten. (2 Punkte)

- (b) Bestimmen Sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung aus (a) für eine gegebene Energie E . Finden Sie Lösungen für jedes E ? Wie lautet die allgemeine Lösung der (nicht stationären) Schrödingergleichung?

Hinweis: An einer Stelle mit einem unendlichen Sprung im Potential kann die Wellenfunktion im allgemeinen nicht differenzierbar sein. Anschlussbedingung ist hier also nur die Stetigkeit der Wellenfunktion. (3 Punkte)

- (c) Nun betrachten wir ein Teilchen im dreidimensionalen Raum, unter Einfluss eines Potentials

$$V^{(3)}(\vec{x}) = V(x_1) + V(x_2) + V(x_3), \quad (2)$$

wobei $V(\cdot)$ das Potential (1) aus (a) bezeichnet. Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf. (ein Punkt)

- (d) Machen Sie einen Produnktansatz $\phi^{(3)}(\vec{x}) = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)$ und zeigen Sie, dass die stationäre Schrödingergleichung aus (c) auf die aus (a) zurückgeführt wird. (ein Punkt)

- (e) Bestimmen Sie die möglichen Werte für die Energie des Teilchens. Welche Aussagen können Sie über die Anzahl der Lösungen zu einer gegebenen Energie treffen? (ein Punkt)

Aufgabe 6 - Potentialschwelle, Tunneleffekt (7 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir die in der Vorlesung skizzierte Rechnung zum Tunneleffekt genau nachvollziehen. Dazu betrachten wir ein Teilchen (Masse: m), das an einem Potential der Form

$$V(x) = V_0\Theta(a - |x|) \quad (3)$$

mit $V_0 > 0$, $a > 0$ gestreut wird. Zunächst habe das Teilchen eine Energie $E > 0$ die kleiner ist, als V_0 . Die allgemeine Lösung der stationären Schrödingergleichung lautet dann

$$\phi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für } x < -a \\ Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x} & \text{für } -a \leq x \leq a, \\ Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & \text{für } a < x \end{cases}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (4)$$

wobei die Konstanten A, B, C, D, F, G so gewählt werden müssen, dass die Lösung stetig und differenzierbar ist.

- (a) Stellen Sie die Gleichungen für Stetigkeit und Differenzierbarkeit von ϕ (die *Anschlussbedingungen*) auf, und zeigen Sie, dass diese für den Fall eines von links einfallenden Teilchens (d.h. $G = 0$) gelöst werden durch

$$A = F \left(\cosh(2\kappa a) + \frac{i\epsilon}{2} \sinh(2\kappa a) \right) e^{2ika}, \quad B = -\frac{i\eta F}{2} \sinh(2\kappa a) \quad (5)$$

mit $\epsilon = \kappa/k - k/\kappa$, $\eta = \kappa/k + k/\kappa$. (3 Punkte)

- (b) Berechnen Sie die Transmissionsamplitude $S(E)$ und die Reflektionsamplitude $R(E)$ und überprüfen Sie, dass $|S(E)|^2 + |R(E)|^2 = 1$. (2 Punkte)

- (c) Betrachten Sie nun den Fall, dass $E > V_0$. Wie muss der Ansatz (4) für diesen Fall abgeändert werden? Ohne die gesamte Rechnung aus (a) und (b) für diesen Fall komplett zu wiederholen, bestimmen Sie $|S(E)|^2$ und skizzieren Sie die Abhängigkeit von a . Was beobachten Sie?

Hinweis: Achtung, nur analytische Funktionen analytisch fortsetzen. Der Betrag einer analytischen Funktion ist nicht analytisch. (2 Punkte)