Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik D – Quantenmechanik I

Sommersemester 2010

Übungsblatt 4

Abgabe am 10.5.2010, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Aufgabe 7 - Hilbertraum von Funktionen (5 Punkte)

Betrachten Sie den von den Funktionen $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x, \cos 2x$ aufgespannten Hilbertraum. Der Definitionsbereich der Funktionen sei $[0, 2\pi]$ und das innere Produkt

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f_1(x)} f_2(x) dx. \quad (1)$$

- (a) Bestimmen Sie die Dimension des Raumes und finden Sie eine Orthonormalbasis. (3 Punkte)
- (b) Ist die Funktion $\cos^3 x$ ein Vektor in diesem Hilbertraum? Begründen Sie Ihre Antwort. (ein Punkt)
- (c) Sei f eine quadratintegrale Funktion auf $[0, 2\pi]$ die jedoch nicht im oben beschriebenen Hilbertraum enthalten ist. Sie wollen f durch eine Funktion f_0 aus dem Hilbertraum annähern, so dass $\|f - f_0\|$ minimal wird. Bestimmen Sie f_0 (durch eine Rechnung!) so explizit wie möglich. (ein Punkt)

Aufgabe 8 - Eigenschaften von Operatoren (3 Punkte)

Sei P ein Projektionsoperator, U ein unitärer Operator, H und H' hermitesche Operatoren, A ein beliebiger Operator und c eine komplexe Zahl.

- (a) Welche der folgende Operatoren sind hermitesch:

$$A^\dagger A, \quad i[H, H'], \quad UHU^\dagger, \quad PHP, \quad (cH)^\dagger, \quad A + A^\dagger, \quad i(A - A^\dagger) \quad (2)$$

Begründen Sie Ihre Aussagen. (2 Punkte)

- (b) Vereinfachen Sie die folgende Formel so weit wie möglich:

$$UPU(U^2)^\dagger + U^2(U^\dagger)^2 + UP^2U((iU)^\dagger)^2 \quad (3)$$

(ein Punkt)

Aufgabe 9 - Unschärferelation aus der CS-Ungleichung (4 Punkte)

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für beliebige Vektoren u, v eines Hilbert-Raumes $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ lautet

$$|\langle u | v \rangle|^2 \leq \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle. \quad (4)$$

Wir wollen sie dazu benutzen, eine allgemeine Unschärferelation zu beweisen. Gegeben seien dazu zwei hermitesche Operatoren A und B auf dem obigen Hilbert-Raum, sowie ein beliebiger Zustand Ψ aus $\mathcal{H}$. Wir definieren auch noch die Operatoren

$$\Delta^2 A := (A - \langle \Psi | A | \Psi \rangle \mathbb{I})^2, \quad \Delta^2 B := (B - \langle \Psi | B | \Psi \rangle \mathbb{I})^2, \quad (5)$$

wobei wir mit $\mathbb{I}$ den Einheitsoperator bezeichnet haben.

(a) Zeigen Sie mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$|\langle \Psi | [A, B] | \Psi \rangle|^2 \leq 4 \langle \Psi | \Delta^2 A | \Psi \rangle \langle \Psi | \Delta^2 B | \Psi \rangle. \quad (6)$$

Hinweis: Zeigen Sie (6) zunächst für den Fall, dass $\langle \Psi | A | \Psi \rangle = \langle \Psi | B | \Psi \rangle = 0$ und führen Sie den allgemeineren Fall dann auf diesen speziellen zurück. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation für den Ort und den Impuls eines Teilchens ein Spezialfall von (6) ist. (ein Punkt)

Aufgabe 10 - Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Operatoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

auf $\mathbb{C}^2$. Spannen die Eigenvektoren jeweils den Hilbertraum auf?