Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik D – Quantenmechanik I

Sommersemester 2010

Übungsblatt 5 — Abgabe am 17.5.2010, 10:00

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ______

Aufgabe 11 - Operatoren auf Polynomen (4 Punkte)

Betrachten Sie den Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq N$ in einer Variablen (sagen wir x), mit komplexwertigen Koeffizienten. Der Ableitungsoperator $D := d/dx$ wirkt auf Vektoren dieses Raumes.

(a) Finden Sie eine Darstellung des Operators D als Matrix und bestimmen Sie die Eigenwerte von D. (*2 Punkte*)

(b) Wir statten obigen Vektorraum mit einem Skalarprodukt aus, indem wir

$$\langle x^m | x^n \rangle = n!\, \delta_{m,n} \tag{1}$$

setzen. Bestimmen Sie $D^\dagger$ und $[D, D^\dagger]$. Ist D ein unitärer Operator? (*2 Punkte*)

Aufgabe 12 - Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenzuständen (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie:

(i) Die Eigenwerte eines hermiteschen Operators sind reell.

(ii) Die Eigenwerte eines unitären Operators liegen auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ in der komplexen Ebene.

(iii) Als Eigenwerte eines Projektors kommen nur 0 oder 1 infrage.

(*3 Punkte*)

(b) Sei ψ_λ ein Eigenzustand des hermiteschen Operators A zum Eigenwert λ. Berechnen Sie

$$\langle (A - \langle A \rangle_{\psi_\lambda})^2 \rangle_{\psi_\lambda}, \tag{2}$$

wobei

$$\langle \cdot \rangle_{\psi_\lambda} = \frac{\langle \psi_\lambda | \cdot | \psi_\lambda \rangle}{\langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle} \tag{3}$$

den Erwartungswert im Zustand ψ_λ bezeichnet. (*ein Punkt*)

Aufgabe 13 - Funktionen von Operatoren (7 Punkte)

Betrachten Sie den Operator

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

auf dem Hilbertraum $\mathbb{C}^2$.

(a) Bestimmen Sie den Operator $\exp A$, indem Sie in eine Basis aus Eigenvektoren transformieren, die Exponentialfunktion bilden, und zurücktransformieren. (*2 Punkte*)

(b) Wir setzen

$$B := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \tag{5}$$

Berechnen Sie B und vergleichen Sie mit $\exp A$. Warum bekommen Sie bei den beiden Rechnungen das gleiche Ergebnis? (*2 Punkte*)

Nun betrachten wir die Exponentialfunktion des Impulsoperators $\vec{P}$. Sei $\vec{v}$ ein Ortsvektor.

(c) Berechnen Sie die Wirkung von $\exp(i\vec{v} \cdot \vec{P}/\hbar)$ auf eine Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$, indem Sie entweder der Strategie aus (a) oder der aus (b) folgen. In letzterem Fall müssen Sie annehmen, dass $\psi(\vec{x})$ analytisch ist. (*3 Punkte*)