Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik D – Quantenmechanik I

Sommersemester 2010

Übungsblatt 7

Abgabe am 31.5.2010, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Aufgabe 17 - Zur Quantisierung der Energie des harmonischen Oszillators (4 Punkte)

Wie in der Vorlesung erklärt, ergibt sich aus der stationären Schrödingergleichung eine Eigenwertgleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\hat{x}^2} - 2\hat{x} \frac{d}{d\hat{x}} \right] h(\hat{x}) = (1 - 2\epsilon)h(\hat{x}), \quad (1)$$

wobei ϵ durch $E = \hbar\omega\epsilon$ mit der Energie E des harmonischen Oszillators verknüpft ist. Wir wollen genau nachvollziehen, wie die Quantisierung von ϵ (und damit E) in der Analyse dieser Gleichung zustande kommt. Dazu machen wir wie in der Vorlesung den Ansatz

$$h(\hat{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} \hat{x}^{2m+p}, \quad (2)$$

wobei per Definition (von $p \in \mathbb{Z}$) $a_0 \neq 0$ sein soll.

(a) Zeigen Sie, dass aus (1) die folgende Rekursionsrelation für die Koeffizienten a_{2m} folgt:

$$(2m + p + 2)(2m + p + 1)a_{2m+2} = (4m + 2p - 2\epsilon + 1)a_{2m}. \quad (3)$$

(2 Punkte)

(b) Betrachten Sie den Anfang der Rekursion und zeigen Sie, dass entweder $p = 0$ oder $p = 1$. (ein Punkt)

(c) Zeigen Sie, dass nach der Wahl von p alle Koeffizienten a_{2m} , $m > 0$ eindeutig durch a_0 bestimmt sind. Physikalisch relevant ($\rightarrow$ Normierbarkeit) sind nur die Lösungen, für die nur endlich viele Koeffizienten von Null verschieden sind. Leiten Sie daraus die Quantisierungsbedingung für E her. (ein Punkt)

Aufgabe 18 - Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators (6 Punkte)

Für den harmonischen Oszillator existiert eine Klasse von Zuständen, die mit gewisser Berechtigung als "Quasi-klassische" Zustände angesehen werden. Diese *kohärenten Zustände* sollen hier näher betrachtet werden.

(a) Stellen Sie die klassischen Bewegungsgleichungen für den Ort $x(t)$ und den Impuls $p(t)$ eines eindimensionalen harmonischen Oszillators (Masse m , Frequenz ω) auf. Ausgehend von diesen Bewegungsgleichungen, finden Sie die Bewegungsgleichung für die komplexe Größe

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta x(t) + \frac{i}{\hbar\beta} p(t) \right). \quad (4)$$

mit $\beta = \sqrt{m\omega/\hbar}$ und lösen Sie diese. Finden Sie den der Größe $\alpha(0)$ entsprechenden Operator in der Quantentheorie. (ein Punkt)

(b) Motiviert durch (a) betrachten wir Eigenzustände $|\alpha\rangle$ des Vernichtungsoperators a , d.h.

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (5)$$

Finden Sie heraus, wie sich $|\alpha\rangle$ als Linearkombination von Energie-Eigenzuständen $|n\rangle$ schreiben lässt. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie: $|\alpha\rangle(t) = \exp(-i\omega t/2)|\alpha(t)\rangle$, wobei $\alpha(t)$ die Bewegungsgleichung aus (a) mit der Anfangsbedingung $\alpha(0) = \alpha$ erfüllt. (ein Punkt)

(d) Berechnen Sie

$$\langle\alpha(t)|X|\alpha(t)\rangle, \quad \langle\alpha(t)|P|\alpha(t)\rangle, \quad \langle\alpha(t)|X^2|\alpha(t)\rangle, \quad \langle\alpha(t)|P^2|\alpha(t)\rangle \quad (6)$$

und bestimmen Sie die Schwankungsquadrate $(\Delta X)^2$, $(\Delta P)^2$ und deren Produkt. (2 Punkte)

Aufgabe 19 - Der dreidimensionale harmonische Oszillator (5 Punkte)

Der Hamilton-Operator des dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{R}^2. \quad (7)$$

(a) Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung für eine Wellenfunktion $\psi(x, y, z)$ auf und finden Sie die Lösungen. Zeigen Sie dabei, dass die Lösungen durch drei natürliche Zahlen (n_x, n_y, n_z) indiziert werden können, und dass die möglichen Werte der Energie durch

$$E_{(n_x, n_y, n_z)} = \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \quad (8)$$

gegeben sind.

Hinweis: Separationsansatz. (3 Punkte)

(b) Gleichung (8) zeigt, dass die Energieniveaus im allgemeinen entartet sind. Bestimmen Sie den Grad der Entartung.¹ Spekulieren Sie, welche physikalische Größe die entarteten Zustände unterscheiden könnte. (2 Punkte)

¹Der Grad der Entartung ist bei vielen physikalischen Anwendungen interessant, z.B. bei der Behandlung von harmonischen Oszillatoren im thermischen Gleichgewicht.