Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik D – Quantenmechanik I

Sommersemester 2010

Übungsblatt 8 Abgabe am 7.6.2010, 10:00

Name: ________________________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ______

Aufgabe 20 - Zerlegung hermitescher 2x2-Matrizen (10 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Zerlegung einer hermiteschen 2x2-Matrix in die in der Vorlesunge eingeführten *Pauli-Matrizen* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und finden Eigenwerte und Eigenzustände. Zunächst machen wir eine mathematische Vorüberlegung:

(a) Betrachten Sie den Raum der hermiteschen 2x2-Matrizen mit komplexen Koeffizienten als 4-dimensionalen reellen Vektorraum mit der Basis $\{\mathbb{I}_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$, wobei $\mathbb{I}_2$ die 2x2-Einheitsmatrix bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\langle A \,|\, B\rangle := \mathrm{tr}(AB)/2$ ein Skalarprodukt definiert, und obige Basis zu einer Orthonormalbasis wird. (*2 Punkte*)

Nun finden wir Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix:

(b) Unter Verwendung von (a): Zeigen Sie, dass eine hermitesche Matrix H sich eindeutig schreiben lässt als Linearkombination

$$H = c_0\,\mathbb{I}_2 + \sum_{i=1}^{3} c_i\sigma_i \tag{1}$$

und finden Sie die Koeffizienten c_i, ausgedrückt durch die Komponenten der Matrix H. (*ein Punkt*)

(c) Finden Sie die Eigenwerte von H. Hinweis: Sie können direkt rechnen, oder die Eigenschaften der Pauli-Matrizen ausnutzen. In letzterem Fall hilft die Formel $\det(A) = (\mathrm{tr}(A)^2 - \mathrm{tr}(A^2))/2$ für eine beliebige 2x2-Matrix A. (*ein Punkt*)

(d) Fassen Sie die Koeffizienten $c_i, i = 1, 2, 3$ als Komponenten eines Vektors $\vec{c}$ auf und führen Sie die Polarwinkel (θ, ϕ) ein:

$$\vec{c} = |\vec{c}|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta). \tag{2}$$

Drücken Sie Komponenten von $\vec{c}\cdot\vec{\sigma}$ durch $|\vec{c}|$ und die Winkel aus, und bestimmen Sie die normierten Eigenvektoren dieser Matrix (und damit die Eigenvektoren von H).
Hinweis: Sie sollten

$$\psi_1 = (e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}, e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}), \qquad \psi_2 = (-e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}, e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}) \tag{3}$$

oder etwas äquivalentes finden. (*3 Punkte*)

Diese mathematischen Resultate finden viele physikalische Anwendung. Beispiele:

(e) Zeigen Sie, dass jedes Zweizustandssytem mit spurfreiem Hamilton-Operator mathematisch äquivalent zu einem ruhenden Spin-1/2 Teilchen mit magnetischem Moment parallel zu seinem Spin, in einem externen magnetischen Feld, unter Vernachlässigung der Ortswellenfunktion ist. (*ein Punkt*)

(f) Finden Sie den Eigenzustand zum Eigenwert $\hbar/2$ für die Spinkomponente in Richtung $\vec{e}_\theta$, ausgedrückt durch die Eigenzustände $|+\rangle, |-\rangle$ der z-Komponente des Spins. $\vec{e}_\theta$ ist hier ein Einheitsvektor, der den Winkel θ mit der z-Achse einschließt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|+\rangle$ einen Spin $\hbar/2$ in Richtung $\vec{e}_\theta$ zu finden. (*2 Punkte*)

Aufgabe 21 - Zum Tensorprodukt (5 Punkte)

Das Tensorprodukt von Hilbert-Räumen ist in der Quantenmechanik immer dann von Bedeutung, wenn ein physikalisches System sich aus verschiedenen Untersystemen zusammensetzt. Wir betrachten zunächst die mathematischen Aspekte. Seien V und V' zwei (komplexe) Vektorräume. Das Tensorprodukt $V \otimes V'$ ist der Vektorraum der Linearkombinationen von Paaren $(v, v') \in V \times V'$ mit folgenden Regeln für die Addition und die Multiplikation mit Skalaren:

$$(v, v') + (w, v') = (v + w, v'), \qquad (v, v') + (v, w') = (v, v' + w') \qquad \lambda(v, v') = (\lambda v, v') = (v, \lambda v') \tag{4}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Paare (v, v') werden oft auch als $v \otimes v'$ geschrieben.

(a) Gegeben Basen $\{b_1, b_2, \ldots\}$ und $\{b'_1, b'_2, \ldots\}$ von V bzw. V', konstruieren Sie eine Basis von $V \otimes V'$. Sofern $\dim V < \infty$ und $\dim V' < \infty$, zeigen Sie, dass $\dim V \otimes V' = \dim V \dim V'$. (*ein Punkt*)

Wir bezeichnen die Operatoren auf V mit $L(V)$. Da diese selber einen Vektorraum bilden, können wir das Tensorprodukt $L(V) \otimes L(V')$ bilden. Elemente dieses Raumes können via

$$(A \otimes A')(v \otimes v') := (Av) \otimes (A'v') \tag{5}$$

mit Operatoren auf $V \otimes V'$ identifiziert werden.

(b) Berechnen Sie den Kommutator von $A \otimes A'$ und $B \otimes B'$ und zeigen Sie, dass der Kommutator von $A_\otimes := A \otimes \mathbb{I}_{V'}$ und $A'_\otimes := \mathbb{I}_V \otimes A'$ verschwindet. (*ein Punkt*)

Wenn V, V' Hilberträume sind, wird auch $V \otimes V'$ mithilfe des durch

$$\langle v \otimes v' \,|\, w \otimes w' \rangle_\otimes := \langle v \,|\, w \rangle \langle v' \,|\, w' \rangle' \tag{6}$$

und linearer Fortsetzung definierten Skalarproduktes zu einem Hilbertraum.

(c) Gegeben Orthonormalbasen $\{b_1, b_2, \ldots\}$ und $\{b'_1, b'_2, \ldots\}$ von V bzw. V', konstruieren Sie eine Orthonormalbasis von $V \otimes V'$. (*ein Punkt*)

Nun zeigen wir zwei physikalische Anwendungen auf:

(d) Schreiben Sie den Zustandsraum eines freien Teilchens im dreidimensionalen Raum mit Spin 1/2 als Tensorprodukt des Raumes der Ortswellenfunktionen und der Spin-Zustände. Geben Sie eine (verallgemeinerte) Basis von Eigenzuständen von Impuls und Spin in diesem Produktraum an. Schreiben Sie den Hamiltonoperator als Operator auf diesem Tensorprodukt. (*ein Punkt*)

(e) Zeigen Sie, dass die Theorie des dreidimensionalen harmonische Oszillators aus Aufgabe 19 als dreifaches Tensorprodukt von der des eindimensionalen harmonischen Oszillators geschrieben werden kann, indem Sie den Hilbertraum als Tensorprodukt und den Hamiltonoperator als Operator auf diesem Produktraum schreiben. (*ein Punkt*)