Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik D – Quantenmechanik I

Sommersemester 2010

Übungsblatt 9

Abgabe am 14.6.2010, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Aufgabe 22 - Zu den Kugelflächenfunktionen (6 Punkte)

- (a) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der assoziierten Legendrepolynome aus der Vorlesung: Die Parität von Y_l^m ist $(-1)^l$. (2 Punkte)
- (b) Beschreiben und skizzieren Sie die Nulllinien (d.h. die Linien auf der Einheitskugel, auf denen die Funktionen verschwinden) der Funktionen $\text{Re}(Y_l^m)$ für $l = 0, 1, 2$ und alle dazu erlaubten m . (2 Punkte)
- (c) Ein Teilchen werde durch eine Wellenfunktion $\psi(x, y, z) = c(x + z) \exp(-r)$ beschrieben, wobei c eine Normierungskonstante ist, und $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man bei einer Messung die z -Komponente des Drehimpulses gleich 0, gleich $\hbar$, gleich $-\hbar$? (2 Punkte)

Aufgabe 23 - Rotationsspektrum eines Moleküls (4 Punkte)

Wir wollen die Rotationsfreiheitsgrade eines Moleküls quantisieren, ohne uns um die interne Struktur des Moleküls zu kümmern. Dazu beschreiben wir es klassisch als starren Körper mit Hauptträgheitsmomenten I_1, I_2, I_3 (alle > 0), dessen Schwerpunkt ruht.

- (a) Drücken Sie die kinetische Energie durch die Komponenten des Drehimpulses aus, und quantisieren Sie die Hamiltonfunktion, indem Sie die Drehimpulskomponenten durch Operatoren mit den bekannten Vertauschungsrelationen ersetzen. (2 Punkte)
- (b) Spezialisieren Sie den gefundenen Hamilton-Operator für den Fall eines "sphärischen" ($I_1 = I_2 = I_3$) und eines "symmetrischen" ($I_1 = I_2 \neq I_3$) Moleküls und berechnen Sie jeweils die Energiespektren so explizit wie möglich. (2 Punkte)

Aufgabe 24 - Baker-Campbell-Hausdorff Formel (5 Punkte)

Im Folgenden sind A, B, C (nicht notwendigerweise hermitesche) Operatoren.

- (a) Zeigen Sie $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$. (ein Punkt)
- (b) Zeigen Sie $[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$, sofern $[[A, B], A] = 0$. n ist hier eine natürliche Zahl. (2 Punkte)
- (c) Zeigen Sie

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]} \quad (1)$$

sofern A und B mit $[A, B]$ vertauschen. Die Exponentialfunktionen sind hier als Potenzreihen zu verstehen. Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(t) = \exp(tA) \exp(tB)$. Finden Sie eine Differentialgleichung für f , und vereinfachen sie diese soweit, dass Sie sie ohne weiteres integrieren können. (2 Punkte)