Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik D – Quantenmechanik I

Sommersemester 2010

Übungsblatt 10

Abgabe am 21.6.2010, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Aufgabe 25 - Klassisches Teilchen im elektromagnetischen Feld (4 Punkte)

Wir betrachten die Theorie eines klassischen Teilchens (Masse m , Ladung q) in einem elektromagnetischen Feld. Aus der Elektrodynamik-Vorlesung wissen Sie, dass auf das Teilchen eine Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = q(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})) \quad (1)$$

wirkt, wobei $\vec{r}$ die Position und $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - q\Phi(\vec{r}) \quad (2)$$

die Kraft (1) auf das Teilchen ergibt. $\vec{A}$ und Φ sind hier Vektor- und skalares Potential, aus denen sich das elektromagnetische Feld als $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\nabla\Phi - \dot{\vec{A}}$ ergeben. (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie, wie sich die Lagrangefunktion unter einer Eichtransformation $\vec{A} \mapsto \vec{A} - \nabla\omega$, $\Phi \mapsto \Phi + \dot{\omega}$ ändert. Finden Sie einen einfachen Ausdruck für die Änderung des Wirkungsintegrals

$$S[\vec{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) dt. \quad (3)$$

(ein Punkt)

Aufgabe 26 - Zweidimensionaler harmonischer Oszillator (8 Punkte)

Wir betrachten einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2). \quad (4)$$

(a) Quantisieren Sie das System als Tensorprodukt zweier eindimensionaler harmonischer Oszillatoren. Drücken Sie insbesondere den Hamilton-Operator durch die Vernichtungsoperatoren

$$a_x \equiv a \otimes \mathbb{I}, \quad a_y \equiv \mathbb{I} \otimes a \quad (5)$$

und ihre Adjungierten aus. a ist hier der Vernichtungsoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators. (2 Punkte)

(b) Finden Sie den zu $L_z = xp_y - yp_x$ gehörigen Operator, und zeigen Sie, dass er mit dem Hamiltonoperator vertauscht. (2 Punkte)

(c) Definieren Sie die Operatoren

$$a_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y), \quad a_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y) \quad (6)$$

und berechnen Sie $[a_d, a_d^\dagger]$, $[a_g, a_g^\dagger]$ und $[a_g, a_d]$, $[a_g, a_d^\dagger]$. (2 Punkte)

(d) Drücken Sie den Hamilton-Operator und L_z durch die Operatoren (6) und ihre Adjungierten aus. Interpretieren Sie das Ergebnis. (2 Punkte)

Aufgabe 27 - Infinitesimale Rotationen (3 Punkte)

Wir wollen die Formel

$$R_D = \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} \delta\vec{\phi} \cdot \vec{L} \quad (7)$$

aus der Vorlesung herleiten. Wir betrachten zunächst eine endliche Drehung S . Wir wählen unsere Koordinaten so, dass S eine Drehung um die z -Achse um den Winkel ϕ ist. Für eine (als differenzierbar angenommene) Wellenfunktion ψ berechnen Sie die Wirkung $R_S\psi$ der Drehung S auf die Wellenfunktion in Abhängigkeit von ϕ und machen eine Taylorentwicklung in ϕ bis zur ersten Ordnung. Begründen Sie nun (7).