

Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik D – Quantenmechanik I

Sommersemester 2010

Übungsblatt 12

Abgabe am 5.7.2010, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Hinweise zur Durchführung der Klausur:

- Die Hauptklausur findet statt am 28.7. von 11:00 bis 13:00 in Gehrtsen- und Gaede-Hörsaal. Details zur Hörsaalbelegung werden noch bekanntgegeben.
- In Bezug auf das Prozedere zur neuen Prüfungsordnung für den Bsc-Studiengang erhalten Sie sobald wie möglich weitere Informationen von entsprechender Stelle.
- In der Klausur wird Ihnen zwei Stunden Zeit zur Bearbeitung der Aufgaben gegeben. Als Hilfsmittel können Sie eine Formelsammlung (handgeschrieben, höchstens die zwei Seiten eines DIN A4-Papiers) verwenden. Ausländische Studierende können auch ein Wörterbuch mitbringen. Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.
- We may offer an English translation of the exam questions to facilitate things for foreign students. If you would like to receive an English translation if this is offered, please send an email to Dr. Sahlmann.
- Denken Sie daran, dass Sie für die Zulassung zur Klausur mindestens 40% der Punkte aus den Übungsaufgaben benötigen. Übungsblatt 13 wird auch 15 mögliche Punkte enthalten, Sie können also maximal 192 Punkte erhalten, und benötigen mindestens 76 Punkte zur Zulassung zur Klausur. Bitte denken Sie auch daran, dass Sie sich zu dieser Vorleistung anmelden müssen, wenn Sie im Bsc-Studiengang studieren.

Aufgabe 31 - Zeeman-Effekt (6 Punkte)

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass der Hamilton-Operator für ein Wasserstoff-Atom im Magnetfeld durch

$$H = \frac{1}{2\mu} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + qU(|\vec{r}|) \quad (1)$$

gegeben ist, wobei U das Coulomb-Potential bezeichnet. Für ein konstantes Magnetfeld $\vec{B}$ kann man $\vec{A} = -\vec{r} \times \vec{B}/2$ setzen und findet $H = H_0 + H_1 + H_2$, wobei H_0 den Hamilton-Operator in Abwesenheit eines Magnetfeldes beschreibt, und

$$H_1 = -\frac{q}{2\mu} \vec{L} \cdot \vec{B}, \quad H_2 = \frac{q^2}{8\mu} \vec{B}^2 \vec{r}_\perp^2. \quad (2)$$

$\vec{r}_\perp$ ist hier der Anteil von $\vec{r}$ senkrecht zu $\vec{B}$.

(a) Zeigen Sie, dass $H = H_0 + H_1 + H_2$. (3 Punkte)

(b) Vernachlässigen Sie den Term H_2 und nehmen Sie ein Magnetfeld in z-Richtung, $\vec{B} = B\vec{e}_z$ an. Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen ϕ_{nlm} von H_0 auch Eigenfunktionen von $H_0 + H_1$ sind, und berechnen Sie das Energiespektrum. Die sich ergebende Aufspaltung der Niveaus heisst *Zeeman-Effekt*. (ein Punkt)

- (c) Elektronen haben ein intrinsisches magnetisches Moment $\vec{M}_s \simeq q\vec{S}/\mu$. Wenn man dies berücksichtigt ergibt sich ein Term von ähnlicher Form wie H_1 . Erweitern Sie den Hilbertraum um den Elektronenspin zu berücksichtigen, und geben Sie den Zusatzterm an. Finden Sie Eigenfunktionen und -werte für den Hamiltonoperator mit Zusatzterm (immer noch unter Vernachlässigung von H_2). (2 Punkte)

Aufgabe 32 - Eichtransformation in der QM (4 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines Teilchens mit Masse m und Ladung q in einem elektromagnetischen Feld,

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - q\vec{A}(t, \vec{r}) \right)^2 + q\Phi(t, \vec{r}) \quad (3)$$

ist im Allgemeinen nicht invariant unter einer Eichtransformation $\vec{A} \mapsto \vec{A} - \vec{\nabla}\omega$, $\Phi \mapsto \Phi + \partial_t\omega$. Dies kann jedoch durch eine Phasenverschiebung der Wellenfunktion kompensiert werden. Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\Psi'(t, \vec{r}) = \exp(-iq\omega(t, \vec{r})/\hbar)\Psi(t, \vec{r})$ die Schrödinger-Gleichung für den eichtransformierten Hamiltonoperator erfüllt, wenn $\Psi(t, \vec{r})$ sie für den ursprünglichen Hamiltonoperator erfüllt.

Aufgabe 33 - Zerlegung der ebenen Wellen (5 Punkte)

Wir betrachten ein freies Teilchen mit Masse m . Da die zugehörigen Operatoren vertauschen, gibt es eine Basis des Hilbertraums aus gemeinsamen Eigenfunktionen von $\vec{L}^2, L_z$ und dem Hamilton-Operator H . Diese sind von der Form

$$\phi_{klm}(r, \theta, \varphi) = j_l(kr)Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (4)$$

wobei der Energieeigenwert $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ durch $k \geq 0$ bestimmt ist. Die Funktionen j_l heißen *sphärische Besselfunktionen* und sind durch eine Differentialgleichung, sowie Regularität am Ursprung festgelegt. Natürlich sind auch die ebenen Wellen $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ stationäre Zustände für das freie Teilchen. Für die Streutheorie ist es interessant, diese in die Basis (4) zu zerlegen. Dies wollen wir nun tun. Wir betrachten den Fall $\vec{k} = k\vec{e}_z$.

- (a) Zeigen Sie, dass sich für $\vec{k} = k\vec{e}_z$ die gesuchte Entwicklung auf die Bestimmung der c_l in

$$e^{i\rho u} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l j_l(\rho) P_l(u) \quad (5)$$

reduziert. (2 Punkte)

- (b) Zeigen Sie $c_l = (2l+1)i^l$. Hinweis: Berechnen Sie $i u \exp(i\rho u)$ zweimal, einmal indem Sie (5) nach ρ differenzieren, einmal durch Multiplikation von (5) mit $i u$ und Verwendung von

$$(2l+1)uP_l(u) = (l+1)P_{l+1}(u) + lP_{l-1}(u). \quad (6)$$

Machen Sie dann einen Koeffizientenvergleich und benutzen Sie

$$(2l+1)j_l(\rho) = \rho(j_{l+1}(\rho) + j_{l-1}(\rho)), \quad j_{l-1}(\rho) = \rho^{-l-1} \frac{d}{d\rho}(\rho^{l+1}j_l(\rho)). \quad (7)$$

Auch die Formel $j_l(0) = \delta_{l,0}$ ist nützlich. (3 Punkte)