KIT INSTITUT FÜR THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK

Quantenmechanik I SS 11

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

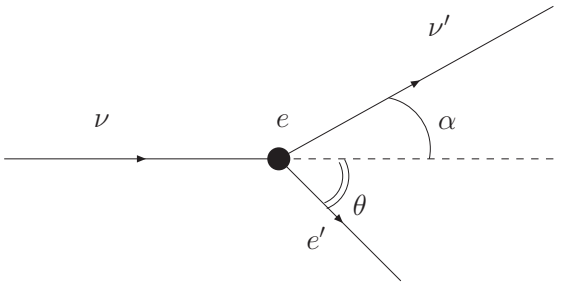
Übungsblatt 1
Abgabe 21.04.2011
Besprechung 27.04.2011

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte Ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 1: Compton-Effekt (6 Punkte)

Ein Photon γ der Frequenz ν stoße auf ein ruhendes Elektron e der Masse m. Nach dem Stoß habe das gestreute Photon γ' die Frequenz ν' und das Elektron habe Impuls $\mathbf{p}'_e$ und Energie E'_e. Der Streuwinkel zwischen γ und γ' sei α.



a) Stellen Sie den Energieerhaltungssatz und den Impulserhaltungssatz auf. Fassen sie beide Gleichungen zusammen, indem Sie die Vierer-Impulsvektoren

$$p_e = \begin{pmatrix} E_e/c \\ \mathbf{p}_e \end{pmatrix} \quad , \quad p_\gamma = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \mathbf{p}_\gamma \end{pmatrix} \quad , \quad p'_e = \begin{pmatrix} E'_e/c \\ \mathbf{p}'_e \end{pmatrix} \quad , \quad p'_\gamma = \begin{pmatrix} E'_\gamma/c \\ \mathbf{p}'_\gamma \end{pmatrix}$$

definieren. Die ungestrichenen (gestrichenen) Größen beschreiben dabei die Situation vor (nach) dem Stoß. Berechnen Sie nun $(p_\gamma - p'_\gamma)^2$ und $(p_e - p'_e)^2$. Drücken Sie Ihre Ergebnisse durch E_γ, E'_γ, α und die Elektronmasse m aus. Welche Beziehung besteht zwischen E_γ, E'_γ und α? (4 Punkte)

b) Leiten Sie aus Ihrem Ergebnis aus (a) die Compton-Formel

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\alpha)$$

ab. Dabei sind λ und λ' die Wellenlängen des einlaufenden bzw. gestreuten Photons und $h/(mc) \approx 2.4 \times 10^{-10}\,\text{cm}$ ist die Compton-Wellenlänge des Elektrons. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Photonen-Zustände (14 Punkte)

a) Es sei A ein linearer Operator auf dem Vektorraum $\mathcal{H}$ ($\dim \mathcal{H} = N$). Aus der Vorlesung kennen Sie die Matrixdarstellung $A_{jk} = \langle e_j | A | e_k \rangle$ von A bzgl. der Orthonormalbasis $\{|e_1\rangle, \ldots |e_N\rangle\}$. Beweisen Sie

$$A = \sum_{j,k} A_{jk} |e_j\rangle \langle e_k| \quad .$$

Hinweis: Zwei Operatoren sind identisch wenn sie die gleiche Matrixdarstellung haben. (2 Punkte)

b) Die Zustände $|x\rangle$, $|y\rangle$ und $|\phi\rangle = \cos\phi\,|x\rangle + \sin\phi\,|y\rangle$ beschreiben linear polarisierte Photonen mit den Polarisationsrichtungen $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ und $\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y$. Betrachten Sie den Operator $P_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von P_ϕ bzgl. $\{|x\rangle, |y\rangle\}$. (2 Punkte)

c) Licht sei in der Richtung $\cos\alpha\,\mathbf{e}_x + \sin\alpha\,\mathbf{e}_y$ polarisiert und werde durch den Zustandsvektor $|\alpha\rangle = \cos\alpha|x\rangle + \sin\alpha|y\rangle$ beschrieben. Der Erwartungswert einer Messung der Polarisation in Richtung $\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y$ ist $w_\phi(\alpha) = \langle\alpha|P_\phi|\alpha\rangle$. Berechnen Sie diesen Erwartungswert sowie die Unschärfe

$$\Delta P_\phi(\alpha) = \sqrt{\langle\alpha|P_\phi^2|\alpha\rangle - w_\phi(\alpha)^2} \quad .$$

Für welche α finden Sie maximale bzw. minimale Unschärfe? (2 Punkte)

d) Links- bzw. Rechts-Zirkular polarisierte Photonen werden beschrieben durch

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \quad , \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \quad .$$

Der Basiswechsel von $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ nach $\{|L\rangle, |R\rangle\}$ werde durch einen linearen Operator U mit $U|x\rangle = |L\rangle$ und $U|y\rangle = |R\rangle$ beschrieben. Zeigen Sie anhand der Matrixdarstellung von U, dass U unitär ist. (2 Punkte)

e) Betrachten Sie die Operatoren $P_L = |L\rangle\langle L|$ und $P_R = |R\rangle\langle R|$ und berechnen Sie die Matrixdarstellungen von P_L und P_R bezüglich der Basis $\{|x\rangle, |y\rangle\}$. Sind P_L und P_R hermitisch? Berechnen Sie die Matrixdarstellungen von $P_L P_R$, $P_R P_L$ sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren von P_L und P_R und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. (2 Punkte)

f) $|L\rangle$ und $|R\rangle$ sind Zustände mit *Helizität* -1 und $+1$.[1] Sie sind also Eigenzustände des Helizitätsoperators H mit $H|L\rangle = -|L\rangle$ und $H|R\rangle = +|R\rangle$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von H bzgl. $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ und bestimmen Sie die Erwartungswerte und Unschärfen von H für die Zustände $|x\rangle$ und $|y\rangle$. (2 Punkte)

[1] Zur physikalischen Bedeutung: Die Helizität ist die Projektion des Drehimpulses auf die Bewegungsrichtung des Photons.