Quantenmechanik I SS 11

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

Übungsblatt 2
Abgabe 29.04.2011
Besprechung 04.05.2011

Name: _____ Matrikel-Nr: _____ Gruppe: _____

(Bitte Ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 3: Kommutatoren

(10 Punkte)

Es seien $A, B, C, X(t)$ und $Y(t)$ lineare Operatoren auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum mit Dimension N .

- a) Zeigen Sie: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$. (1 Punkt)
- b) Zeigen Sie: $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$. (1 Punkt)
- c) Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt}[X(t), Y(t)] = \left[\frac{d}{dt}X(t), Y(t) \right] + \left[X(t), \frac{d}{dt}Y(t) \right] .$$

Dabei ist die Ableitung eines Operators definiert über seine Matrixdarstellung bezüglich einer (beliebigen) Orthonormalbasis $\{|e_1\rangle, \dots, |e_N\rangle\}$:

$$X(t) = \sum_{i,j=1}^N X_{ij}(t) |e_i\rangle \langle e_j| \Rightarrow \frac{d}{dt}X(t) = \sum_{i,j=1}^N \frac{dX_{ij}}{dt}(t) |e_i\rangle \langle e_j| .$$

(2 Punkte)

- d) Es sei

$$X(t) = X_0(t) = e^{tA} B e^{-tA} \quad , \quad X_{n+1}(t) = [A, X_n(t)] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad (1)$$

wobei A und B nicht von t abhängen. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\frac{d^n}{dt^n} X(t) = X_n(t) \quad . \quad (2)$$

(2 Punkte)

- e) Beweisen Sie mit (2) die *Campbell-Baker-Hausdorff-Formel*

$$e^{tA} B e^{-tA} = B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n \quad , \quad (3)$$

wobei B_n analog zu $X_n(t)$ in (1) definiert ist.

(2 Punkte)

- f) Betrachten Sie den Fall

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie B_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie auch $e^{\pm tA}$ und verifizieren Sie (3).

(2 Punkte)

Aufgabe 4: Pauli-Matrizen

(10 Punkte)

Jede spurlose hermitesche 2×2 -Matrix lässt sich als Linearkombination der drei Pauli-Matrizen schreiben:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

a) Zeigen Sie, dass mit der unitären Matrix

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad (5)$$

die Beziehungen

$$U^\dagger \sigma_j U = \sigma_{j+1} \quad (6)$$

mit $j = 1, 2, 3$ und $\sigma_4 \equiv \sigma_1$ gelten.

(1 Punkt)

b) Beweisen Sie die Formel

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

zunächst für $(i, j) \in \{(3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$. Benutzen Sie dann (6), um die übrigen Fälle mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ zu zeigen. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{1},$$

wobei $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i$ ist. Beweisen Sie für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^3$:

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbb{1} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (7)$$

wobei $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \equiv \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i$ ist.

(2 Punkte)

d) Zeigen Sie für $\phi \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\mathbf{n}| = 1$, dass gilt:

$$e^{i\phi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2} = \mathbb{1} \cos \frac{\phi}{2} + i(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin \frac{\phi}{2}. \quad (8)$$

Hinweis: Wenden Sie (7) auf $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2$ an, um die Exponentialreihe in (8) aufzusummieren.

(2 Punkte)

e) Betrachten Sie nun (für $|\mathbf{n}| = 1$) einen beliebigen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ und definieren Sie $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n}$. Verifizieren Sie, dass $\mathbf{n}$, $\mathbf{a}_\perp$ und $\mathbf{n} \times \mathbf{a}$ zueinander orthogonal sind. Berechnen Sie $|\mathbf{a}_\perp|^2$ und $|\mathbf{n} \times \mathbf{a}|^2$. Betrachten Sie nun den Vektor $\mathbf{a}'$, der durch Rotation von $\mathbf{a}$ um die Achse $\mathbf{n}$ mit Winkel ϕ hervorgeht. Bestätigen Sie durch eine Zeichnung, dass $\mathbf{a}'$ gegeben ist durch

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{a}_\perp \cos \phi + \mathbf{n} \times \mathbf{a} \sin \phi.$$

Berechnen Sie den durch

$$\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} = e^{-i\phi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2} (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) e^{i\phi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2}$$

definierten Vektor $\mathbf{b}$ mit Hilfe von (7) und (8). Wie hängt $\mathbf{b}$ mit $\mathbf{a}'$ zusammen? (3 Punkte)