Quantenmechanik I SS 11

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

Übungsblatt 3
Abgabe 06.05.2011
Besprechung 11.05.2011

Name: _____ Matrikel-Nr: _____ Gruppe: _____
(Bitte Ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 5: Matrix-Exponentialfunktion (10 Punkte)

- a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine komplexe Matrix. Zeigen Sie, dass die Exponentialreihe

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

für jedes A definiert ist. Zeigen Sie dazu, dass die Reihe

$$[e^A]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [A^k]_{ij}$$

für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$ konvergiert. Dabei dürfen Sie verwenden, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für beliebige $x \in \mathbb{C}$ konvergiert. (2 Punkte)

- b) Zeigen Sie, dass für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda A} = A e^{\lambda A} = e^{\lambda A} A$$

gilt. (2 Punkte)

- c) Seien nun B eine weitere komplexe $n \times n$ -Matrix. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an, die A und B erfüllen müssen, damit

$$e^{\lambda(A+B)} = e^{\lambda A} e^{\lambda B}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. (2 Punkte)

- d) Sei nun $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hermitesch, d.h. $M^\dagger = M$. Beweisen Sie, dass dann e^{iM} unitär, also $[e^{iM}]^\dagger e^{iM} = e^{iM} [e^{iM}]^\dagger = \mathbb{1}$ ist. (2 Punkte)

- e) Beweisen Sie für $M = M^\dagger$ folgende Beziehung:

$$\det e^{iM} = e^{i \operatorname{Tr} M},$$

wobei "Tr M " die Spur der Matrix M bezeichnet. (2 Punkte)