Quantenmechanik I SS 11

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

Übungsblatt 4
Abgabe 13.05.2011
Besprechung 18.05.2011

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte Ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 6: Funktionenräume (10 Punkte)

Der *Schwartz-Raum* ist die Menge der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deren Ableitungen (einschließlich der "nullten", also der Funktion selbst) schneller abfallen als jede Potenzfunktion:

$$\mathcal{S} = \{ f \in C^\infty[\mathbb{R}] : \max_{x\in\mathbb{R}} \left| x^p \frac{d^k f}{dx^k} \right| < \infty \; \forall \, p, k \in \mathbb{N} \} \quad .$$

Man definiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ auf $\mathcal{S}$ durch

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{C} \; , \; (\chi, \psi) \mapsto \langle \chi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \chi^*(x) \psi(x) \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ wohldefiniert ist, d.h. dass das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \chi^*(x)\psi(x)$ für alle $\chi, \psi \in \mathcal{S}$ konvergiert. (1 Punkt)

b) Beweise Sie, dass $\langle \cdot | \cdot \rangle$ eine *positiv definite hermitesche Bilinearform* ist. Zeigen Sie dazu folgende Eigenschaften:

   i) Linearität in der 2. Variablen: $\langle \chi | \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \chi | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \chi | \psi_2 \rangle$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \; \chi, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}$.

   ii) Symmetrie: $\langle \chi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \chi \rangle$ für alle $\psi, \chi \in \mathcal{S}$.

   iii) Positivität: $\langle \psi | \psi \rangle > 0$ für alle $\psi \in \mathcal{S}, \; \psi \neq 0$ und $\langle \psi | \psi \rangle = 0$ für $\psi = 0$.

   (2 Punkte)

c) Wir definieren die Operatoren P und X durch

$$X\psi(x) = x\psi(x) \quad , \quad P\psi(x) = -i \frac{d\psi}{dx}$$

   für alle $\psi \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass X und P hermitesch sind, d.h. dass

$$\langle \chi | X\psi \rangle = \langle X\chi | \psi \rangle \quad , \quad \langle \chi | P\psi \rangle = \langle P\chi | \psi \rangle$$

   für alle $\chi, \psi \in \mathcal{S}$. (2 Punkte)

d) Der Fourier-Operator $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ipx}\psi(x)$$

für alle $\psi \in \mathcal{S}$, $p \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}^{-1}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-ipx}\psi(p)$$

für alle $\psi \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbb{R}$. Dabei dürfen Sie verwenden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ipx} = 2\pi\delta(p)$ ist, wobei $\delta(p)$ die Dirac'sche Deltafunktion ist. (1 Punkt)

e) Zeigen Sie, dass $(2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}$ ein unitärer Operator ist. (2 Punkte)

f) Berechnen Sie $\mathcal{F}^{-1}X\mathcal{F}\psi(x)$ und $\mathcal{F}^{-1}P\mathcal{F}\psi(x)$ für beliebige $\psi \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbb{R}$. (2 Punkte)

Aufgabe 7: Ort, Impuls, Translation (10 Punkte)

Der Impulsoperator P und der Ortsoperator X sind (für eine Raumdimension) in der Ortsdarstellung durch

$$P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{und} \quad X = x \tag{1}$$

gegeben.

a) Benutzen Sie (1), um $[X^n, P]$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen. (1 Punkt)

b) Benutzen Sie Aufgabe 3a und die Vertauschungsrelation $[X, P] = i\hbar$, um $[X^n, P]$ und $[X, P^n]$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen. (2 Punkte)

c) Der *Translationsoperator* ist definiert als

$$\mathcal{T}_a = \exp\left[\frac{i}{\hbar}Pa\right] \quad , \quad a \in \mathbb{R} \quad .$$

Es sei $\psi(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ analytisch. Berechnen Sie $\mathcal{T}_a\psi(x)$. Wenn Sie $\mathcal{T}_a$ als aktive Transformation auffassen, wird dann $\psi(x)$ um $+a$ oder um $-a$ in x-Richtung verschoben? (2 Punkte)

d) Berechnen Sie

$$[\mathcal{T}_a, X]$$

i) mit Hilfe der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel (siehe Aufgabe 3e)
ii) durch Anwendung des Ergebnisses aus (c) auf $[X, \mathcal{T}_a]\psi(x)$.

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis: Welchen Unterschied macht es, ob Sie zuerst $\psi(x)$ um $\pm a$ in x-Richtung verschieben und dann den Ort messen oder die Reihenfolge der beiden Operationen vertauschen? (3 Punkte)

e) Die Eigenfunktionen von P sind $\psi_p(x) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}px\right]$ mit $p \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\psi_p(x)$ auch Eigenfunktion von $\mathcal{T}_a$ ist und bestimmen Sie die Eigenwerte. Betrachten Sie $\langle\mathcal{T}_a\chi|\mathcal{T}_a\psi\rangle$ für beliebige $\chi, \psi \in L^2[\mathbb{R}]$ und entscheiden Sie, ob $\mathcal{T}_a$ unitär ist. (2 Punkte)